

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

UNA VERSIÓN DEL TEOREMA DE HELSON - SZEGÖ PARA ESPACIOS CON MÉTRICA INDEFINIDA

Autor: Lic. Kendy Armas.

Tutor: Dra. Marisela Domínguez.

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Magister Scientiarum, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela

Noviembre, 2008.

Agradecimiento

A Dios, que es mi esperanza, mi guía en este camino maravilloso. Lo más hermoso que me ha pasado en la vida ha sido llegar a su presencia.

A mis padres Rafael Armas y Norma Miranda, a quienes honro y agradezco tanto. A mi abuelita Julia Margarita y mis tías Omaira, Norma, Carmen y Elizabeth, como mis segundas madres, mujeres que fueron vital en mi niñez y en lo que soy hoy día.

A mis hermanos Rafael Arturo, Thais, Eraliz, Mildred, Kenia, Keyla, Rocio, mi socia querida y Lucerito. Ustedes son el apoyo continuo, el regalo para fortalecerme día a día.

A mis primos y sobrinos, hermosos por dentro y por fuera, luchadores, a quienes quisiera transmitirle un buen ejemplo, las ganas de estudiar y de seguir siempre hacia adelante.

A mis amigos, compañeros de vida, por su apoyo, cariño, sonrisas, consejos, momentos maravillosos, el hecho de ser, de estar y su buen ejemplo. Tengo tanto que agradecerles. En especial Edgar Hernández, nunca tendré como retribuir tu ayuda y tu cariño. Gente maravillosa en UCV, compañeros de estudio, todo el grupo del seminario de análisis. Gente maravillosa en UPEL-IPC, mis compañeros de trabajo. Qué dicha coincidir con ustedes.

A mi tutora, Prof. Marisela Domínguez, por darme la oportunidad de seguir adelante cuando había perdido el sendero, por su paciencia y gran disposición, por su comprensión y sus correcciones tan detalladas y continuas, por su excelente ejemplo que habla por si mismo, que me motiva y me inspira.

Al Prof. Ramón Bruzual, por su colaboración en la revisión de este trabajo, por ser simplemente ejemplar, un excelente académico y un equipo de trabajo genial junto a la profesora Domínguez.

A esta maravillosa casa de estudios, Universidad Central de Venezuela, la casa que vence las sombras, de la cual me siento sumamente orgullosa. A toda el equipo de gente que la conforma, profesores, estudiantes, empleados y obreros.

Índice general

Resumen	1
Introducción	2
Capítulo 1. Espacios de Krein	3
1. Espacios con producto interno	3
2. Ortogonalidad en espacios con producto interno y vectores isotrópicos.	6
3. Operadores en espacios con producto interno	7
4. Descomposición fundamental y simetrías fundamentales	8
5. Descomposición fundamental y completitud	12
6. Definición, caracterización básica y topología fuerte en espacios de Krein	15
7. Funcionales lineales continuos en espacios de Krein	17
Capítulo 2. Funciones y medidas en espacios de Krein.	19
1. Polinomios trigonométricos y transformada de Hilbert en espacios de Krein	19
2. Funciones a valores vectores en espacios de Krein	20
3. Funciones a valores operadores en espacios de Krein	22
4. Medidas a valores operadores en espacios de Krein	24
Capítulo 3. Una versión del teorema de Helson y Szegő a valores operadores en espacios de Krein.	29
1. Extensión a valores operadores del teorema de Helson y Szegő en Krein.	29
Bibliografía	40

Resumen

Los espacios de Krein son una generalización de los espacios de Hilbert.

El conocido teorema de Helson - Szegö da una condición necesaria y suficiente para que el pasado y el futuro esten en ángulo estrictamente positivo. En este trabajo se da una versión a valores operadores en espacios de Krein del teorema de Helson - Szegö.

Introducción

En este trabajo se presentan los espacios de Krein los cuales son una generalización de los espacios de Hilbert.

En el capítulo 1 presentamos las bases de la definición de espacios de Krein. Uno de los resultados más importantes que se presentan en este capítulo es la equivalencia de las normas asociadas a descomposiciones fundamentales distintas. Esto permite definir la topología fuerte en espacios de Krein. También se presenta una generalización para espacios de Krein del teorema de representación de Riesz para funcionales lineales continuos en la topología fuerte.

El teorema de Helson y Szegö [10] da una condición necesaria y suficiente para que la transformada de Hilbert sea acotada sobre $L^2(\mathbb{T}, \mu)$. La condición es que μ debe ser absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, $d\mu = wdx$, y la densidad w tiene la forma $w = \exp(u + \tilde{v})$, con $u \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$ donde $\tilde{v}$ denota la conjugada armónica de v . Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ las variedades lineales generadas por $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$ y $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}, k \leq -1\}$ respectivamente, la condición de Helson y Szegö también dan una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ tengan un ángulo, $\alpha_0(\mu)$, estrictamente positivo en $L^2(\mathbb{T}, \mu)$.

Los capítulos 2 y 3 están inspirados en el artículo de Bruzual - Domínguez, “Operator-valued extension of the theorem of Helson and Szegö”. En la sección 2 de este artículo se presentan resultados de funciones a valores vectores, funciones a valores operadores y medidas a valores operadores en espacios de Hilbert. En el capítulo 2 de este trabajo de grado, se obtienen las versiones para espacios de Krein de tales resultados.

Finalmente, en el capítulo 3, obtenemos el resultado principal de este trabajo el cual es una versión del teorema de Helson - Szegö a valores operadores en espacios de Krein. La versión para espacios de Hilbert está en el artículo de Bruzual - Domínguez [5], sección 3.

CAPÍTULO 1

Espacios de Krein

En este capítulo, consideramos la definición de producto interno, no necesariamente semi-definido. Definiremos descomposiciones y simetrías fundamentales para espacio de Krein. También se estudiarán los funcionales lineales continuos en espacios de Krein.

1. Espacios con producto interno

DEFINICIÓN 1.1. Sea $\mathcal{F}$ un espacio vectorial. Un *producto interno* en $\mathcal{F}$ es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{C}$$

que satisface

- 1) $\langle \alpha_1 x_1 + x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ para todo $\alpha_1 \in \mathbb{C}, x_1, x_2, y \in \mathcal{F}$
- 2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in \mathcal{F}$.

Al par $(\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se le llama *espacio con producto interno*.

Si $(\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno entonces $(\mathcal{F}, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$ también es un espacio con producto interno. Este espacio se conoce con el nombre de *antiespacio de $\mathcal{F}$* .

Si $(\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno, entonces se puede ver que:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \langle x + y, x + y \rangle - \frac{1}{4} \langle x - y, x - y \rangle + \frac{i}{4} \langle x + iy, x + iy \rangle - \frac{i}{4} \langle x - iy, x - iy \rangle.$$

Es importante destacar que la fórmula anterior implica que un producto interno está dado por sus valores en la diagonal $\{(x, x) : x \in \mathcal{F}\}$.

Sea x un elemento del espacio con producto interno $(\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, como $\langle x, x \rangle = \overline{\langle x, x \rangle}$ se tiene que $\langle x, x \rangle$ siempre es un número real.

Se dice que x es *positivo* en $(\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, *negativo* en $(\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ o *neutro* en $(\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si $\langle x, x \rangle > 0$, $\langle x, x \rangle < 0$ ó $\langle x, x \rangle = 0$, respectivamente.

Si el espacio con producto interno $(\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ posee tanto elementos positivos como negativos, se dice que $(\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con *producto interno indefinido*. En caso contrario se dice que el producto interno es *semi-definido*.

LEMA 1.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Si $(\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno semi-definido, entonces se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \text{para todo } x, y \in (\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

La demostración es la misma que se da para espacios de Hilbert.

LEMA 1.3. Todo espacio con producto interno indefinido posee elementos neutros no nulos.

DEMOSTRACIÓN. Sean x e y tales que $\langle x, x \rangle > 0$, $\langle y, y \rangle < 0$. La ecuación

$$\langle x, x \rangle + 2\lambda \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle = 0,$$

tiene solución real λ_0 .

Sea $z = x + \lambda_0 y$, entonces

$$\langle z, z \rangle = \langle x + \lambda_0 y, x + \lambda_0 y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\lambda_0 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \lambda_0^2 \langle y, y \rangle = 0.$$

Si se cumpliera $z = 0$, se tendría que

$$\langle x, x \rangle = \langle -\lambda_0 y, -\lambda_0 y \rangle = |\lambda_0|^2 \langle y, y \rangle,$$

lo que contradice la hipótesis inicial. □

DEFINICIÓN 1.4. Un producto interno semi-definido puede ser *semi-definido positivo* si $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo x , *semi-definido negativo* si $\langle x, x \rangle \leq 0$ para todo x o *neutro* si $\langle x, x \rangle = 0$ para todo x (en este último caso es semi-definido positivo y negativo).

DEFINICIÓN 1.5. Se dice que un producto interno es *definido* si $\langle x, x \rangle = 0$ implica $x = 0$.

En vista del lema anterior todo producto interno definido es semi-definido, por lo tanto en este caso se tiene que $\langle x, x \rangle > 0$ para $x \neq 0$ (producto interno definido positivo) o $\langle x, x \rangle < 0$ para $x \neq 0$ (producto interno definido negativo).

De manera natural se define variedad lineal definida positiva, definida negativa, etc. Por ejemplo una variedad lineal $\mathcal{A}$ es definida positiva si para $x \in \mathcal{A}$ se cumple $\langle x, x \rangle > 0$ para $x \neq 0$.

EJEMPLO 1.6. Sea μ una medida real (signada) definida en un espacio medible (Ω, Σ) . Sea $|\mu|$ la variación total de la medida y sea

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\Omega} |f(\omega)|^2 d|\mu|(\omega) < \infty\}$$

Se tiene que

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} |f(\omega)|^2 \overline{g(\omega)} d\mu(\omega)$$

define un producto interno en $\mathcal{F}$. Dependiendo de las características de la medida μ se obtendrá un producto indefinido, semi - definido , definido, etc.

TEOREMA 1.7 (Krein - Smulian). *Si el espacio con producto interno $\mathcal{F}$ posee un vector positivo (negativo) entonces todo elemento de $\mathcal{F}$ es suma de dos vectores positivos (dos vectores negativos).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \mathcal{F}$ y sea $x_0 \in \mathcal{F}$ tal que $\langle x_0, x_0 \rangle > 0$. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, sea

$$p(\alpha) = \langle x + \alpha x_0, x + \alpha x_0 \rangle = \langle x, x \rangle + 2\alpha \operatorname{Re}(\langle x, x_0 \rangle) + \alpha^2 \langle x_0, x_0 \rangle.$$

Como $\langle x_0, x_0 \rangle > 0$ se tiene que

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} p(\alpha) = +\infty,$$

luego para α grande se tiene que

$$\langle x + \alpha x_0, x + \alpha x_0 \rangle > 0,$$

por tanto, $x + \alpha x_0$ es positivo en $\mathcal{F}$.

Finalmente, $x = (x + \alpha x_0) + (-\alpha x_0)$ y los elementos $x + \alpha x_0$ y $-\alpha x_0$ son positivos en $\mathcal{F}$.

El otro caso (vector negativo) se obtiene a partir de éste, considerando el anti-espacio de $\mathcal{F}$, es decir, cambiándole el signo al producto interno. $\square$

Si $\mathcal{F}$ es un espacio con producto interno, se definen los siguientes conjuntos

$$\mathcal{B}^0 = \{x \in \mathcal{F} : \langle x, x \rangle = 0\}.$$

$$\mathcal{B}^{00} = \{x \in \mathcal{F} : \langle x, x \rangle = 0, x \neq 0\}.$$

$$\mathcal{B}^+ = \{x \in \mathcal{F} : \langle x, x \rangle \geq 0\}.$$

$$\mathcal{B}^{++} = \{x \in \mathcal{F} : \langle x, x \rangle > 0, x \neq 0\}.$$

$$\mathcal{B}^- = \{x \in \mathcal{F} : \langle x, x \rangle \leq 0\}.$$

$$\mathcal{B}^{--} = \{x \in \mathcal{F} : \langle x, x \rangle < 0, x \neq 0\}.$$

COROLARIO 1.8 (Krein - Smulian). *Si $\mathcal{F}$ es un espacio con producto interno indefinido entonces ninguno de los conjuntos $\mathcal{B}^+, \mathcal{B}^{++}, \mathcal{B}^-, \mathcal{B}^{--}$ es una variedad lineal en $\mathcal{F}$.*

2. Ortogonalidad en espacios con producto interno y vectores isotrópicos.

Sea $\mathcal{F}$ un espacio con producto interno y sean $x, y \in \mathcal{F}$. Se dice que x e y son *ortogonales* si $\langle x, y \rangle = 0$, esto es, $x \perp y$.

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos subconjuntos de $\mathcal{F}$ se dice que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *ortogonales*, esto es, $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$, si $x \perp y$ para todo $x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}$.

Si $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ son subconjuntos de $\mathcal{F}$, la *variedad lineal* generada por $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ se denotará por

$$\bigvee \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}.$$

LEMA 1.9. *Sean $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ variedades lineales contenidas en $\mathcal{F}$, ortogonales dos a dos. Si cada una de las variedades lineales $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ es semi-definida positiva entonces $\bigvee \{\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n\}$ es semi-definida positiva.*

DEMOSTRACIÓN. Basta notar que si $x_i \in \mathcal{L}_i, i = 1, \dots, n$ entonces

$$\langle x_1 + \dots + x_n, x_1 + \dots + x_n \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle + \dots + \langle x_n, x_n \rangle.$$

□

Observación: Resultados análogos al lema anterior se satisfacen en variedades lineales semi-definidas negativas, neutras, definidas positivas y definidas negativas.

DEFINICIÓN 1.10. Sea $\mathcal{L}$ una variedad lineal contenida en un espacio con producto interno $\mathcal{F}$. La variedad lineal $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^\perp$, que se denotará por $\mathcal{L}^0$, se llama *parte isotrópica* de $\mathcal{L}$ y sus elementos son llamados *vectores isotrópicos* de $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}^0 \neq \{0\}$ se dice que $\mathcal{L}$ es *degenerado*, o que el *producto interno es degenerado* en $\mathcal{L}$.

Note que todo el espacio $\mathcal{F}$ es degenerado si su parte isotrópica es $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}^\perp$ no es igual a la variedad lineal nula $\{0\}$.

LEMA 1.11. La parte isotrópica $\mathcal{F}^0$ de un espacio con producto interno semi-definido $\mathcal{F}$ es el conjunto de los vectores neutros de $\mathcal{F}$.

DEMOSTRACIÓN. claramente todo vector isotrópico es neutro, como en $\mathcal{F}$ vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que si $x \in \mathcal{F}$, y $\langle x, x \rangle = 0$ entonces $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in \mathcal{F}$. $\square$

Como consecuencia de este lema se tiene que un espacio con producto interno neutro, es necesariamente trivial, es decir,

COROLARIO 1.12. Si $\mathcal{F}$ es un espacio con producto interno neutro, entonces $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{F}$.

3. Operadores en espacios con producto interno

Sea $\mathcal{F}$ un espacio con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A continuación se dan unas definiciones que extienden a las que se suelen dar para operadores en espacios de Hilbert.

Sea $D \subseteq \mathcal{F}$ una variedad lineal y sea $T : D \rightarrow \mathcal{F}$ un operador lineal. A la variedad lineal D se le llama el *dominio* del operador y se suele denotar con $\mathcal{D}(T)$.

DEFINICIÓN 1.13. Se dice que T es *hermitiano* (o $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -hermitiano si se quiere ser más específico) si,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{D}(T).$$

DEFINICIÓN 1.14. Se dice que el operador lineal $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ es una *proyección* si

$$P^2 = P.$$

DEFINICIÓN 1.15. Se dice que el operador lineal $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ es una *proyección ortogonal* o un *proyector* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ortogonal si P es una proyección y P es hermitiano.

DEFINICIÓN 1.16. El operador lineal $T : D(T) \rightarrow \mathcal{F}$ es una $\langle \cdot, \cdot \rangle$ isometría si,

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{para todo } x, y \in D(T).$$

DEFINICIÓN 1.17. Se dice que el operador lineal T es *unitario* si $D(T) = \mathcal{F}$, T es una isometría y $\text{Rango}(T) = \mathcal{F}$.

4. Descomposición fundamental y simetrías fundamentales

DEFINICIÓN 1.18. Sea $\mathcal{F}$ un espacio con producto interno. Se dice que $\mathcal{F}$ es *descomponible* si se puede escribir como suma directa ortogonal de una variedad lineal neutra, una variedad lineal definida positiva y una variedad lineal definida negativa, es decir, existen variedades lineales $\mathcal{F}^0, \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}^-$ tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{F}^0(\dot{+})\mathcal{F}^+(\dot{+})\mathcal{F}^-, \\ \mathcal{F}^0 &\subseteq \mathcal{B}^0, \quad \mathcal{F}^+ \subseteq \mathcal{B}^{++}, \quad \mathcal{F}^- \subseteq \mathcal{B}^{--}. \end{aligned}$$

Toda descomposición del tipo anterior se llama *descomposición fundamental*.

La siguiente proposición justifica la notación que utilizamos.

LEMA 1.19. Si $\mathcal{F}^0, \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}^-$ satisfacen la definición 1.18, entonces $\mathcal{F}^0$ es la parte isotrópica de $\mathcal{F}$.

DEMOSTRACIÓN. Se puede ver que la parte isotrópica de $\mathcal{F}$ es igual a la suma directa ortogonal de las partes isotrópicas de $\mathcal{F}^0, \mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}^-$. Como $\mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}^-$ son definidos, su parte isotrópica es el espacio nulo y como $\mathcal{F}^0$ es neutro, su parte isotrópica es el mismo. $\square$

COROLARIO 1.20. Toda descomposición fundamental de un espacio con producto interno no degenerado $\mathcal{F}$ es de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{F}^+(\dot{+})\mathcal{F}^-, \\ \mathcal{F}^+ &\subseteq \mathcal{B}^{++}, \quad \mathcal{F}^- \subseteq \mathcal{B}^{--}. \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{F}$ un espacio con producto interno no degenerado, descomponible y sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+(\dot{+})\mathcal{F}^-$ una descomposición fundamental de $\mathcal{F}$.

Si $x \in \mathcal{F}$, x se puede descomponer, de manera única, como

$$x = x^+ + x^- \quad \text{con } x^+ \in \mathcal{F}^+, x^- \in \mathcal{F}^-.$$

Se definen los *proyectores fundamentales* asociados a la descomposición $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+(\dot{+})\mathcal{F}^-$ por

$$P^+x = x^+, \quad P^-x = x^-$$

El operador $J : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ definido por

$$J = P^+ - P^-,$$

se llama *simetría fundamental* correspondiente a la descomposición $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+(\dot{+})\mathcal{F}^-$.

TEOREMA 1.21. *J es un operador invertible y P^+ , P^- están determinados por J. En efecto, se satisface:*

$$a) P^+ = \frac{1}{2}(I + J), \quad b) P^- = \frac{1}{2}(I - J) \quad y \quad c) J^2 = I$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos parte a). La parte b) es completamente análoga. Sean I la matriz identidad, $J = P^+ - P^-$ y x tal que $x = x^+ + x^-$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(I + J)x &= \frac{1}{2}[Ix + Jx] \\ &= \frac{1}{2}[x + (P^+ - P^-)x] \\ &= \frac{1}{2}[x + P^+x - P^-x] \\ &= \frac{1}{2}[x + x^+ - x^-] \\ &= \frac{1}{2}[x^+ + x^- + x^+ - x^-] \\ &= P^+x. \end{aligned}$$

Veamos parte c), $J^2(x) = (P^+ - P^-)(x)(P^+ - P^-)(x) = (x^+ - x^-)(x^+ - x^-) = x$. $\square$

TEOREMA 1.22. *Se satisfacen las siguientes propiedades*

(1) *J es una isometría, es decir,*

$$\langle Jx, Jy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{F}$$

(2) *J es hermitiano, es decir,*

$$\langle Jx, y \rangle = \langle x, Jy \rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{F}$$

(3) Si se define $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ por

$$\langle x, y \rangle_J = \langle Jx, y \rangle,$$

entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ es un producto interno definido positivo en $\mathcal{F}$.

DEMOSTRACIÓN.

(1) Veamos que J es una isometría,

$$\begin{aligned} \langle Jx, Jy \rangle &= \langle (P^+ - P^-)(x), (P^+ - P^-)(y) \rangle \\ &= \langle P^+x - P^-x, P^+y - P^-y \rangle \\ &= \langle x^+ - x^-, y^+ - y^- \rangle \\ &= x^+y^+ - x^-y^- \\ &= \langle x^+ + x^-, y^+ + y^- \rangle \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

(2) Veamos que J es hermitiano,

$$\begin{aligned} \langle Jx, y \rangle &= \langle (P^+ - P^-)(x), y^+ + y^- \rangle \\ &= \langle P^+x - P^-x, y^+ + y^- \rangle \\ &= \langle x^+ - x^-, y^+ + y^- \rangle \\ &= \langle x^+ - x^-, y^+ + y^- \rangle. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle Jx, y \rangle &= x^+y^+ + x^-y^- \\ &= \langle x^+ + x^-, y^+ + y^- \rangle \\ &= \langle x^+ + x^-, P^+y - P^-y \rangle \\ &= \langle x^+ + x^-, (P^+ - P^-)y \rangle \\ &= \langle x, Jy \rangle. \end{aligned}$$

(3) Veamos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ es un producto interno definido positivo,

$$\begin{aligned}
 \langle x, x \rangle_J &= \langle Jx, x \rangle \\
 &= \langle (P^+ - P^-)x, x^+ + x^- \rangle \\
 &= \langle P^+x - P^-x, x^+ + x^- \rangle \\
 &= \langle x^+ - x^-, x^+ + x^- \rangle \\
 &= x^+x^+ - (-x^-x^-) \\
 &= x^+x^+ + x^-x^-.
 \end{aligned}$$

Entonces en efecto $\langle x, x \rangle_J > 0$ para todo $x \neq 0$.

□

El producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ se conoce con el nombre de J -producto interno. Como este producto es definido positivo, tiene una norma cuadrática asociada (la J -norma) definida por

$$\|x\|_J = (\langle x, x \rangle_J)^{1/2}.$$

LEMA 1.23. Sea J la simetría fundamental correspondiente a la descomposición $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+(\dot{+})\mathcal{F}^-$ entonces

- (1) $\mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}^-$ son $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ -ortogonales.
- (2) El operador J es una $\| \cdot \|_J$ -isometría.

DEMOSTRACIÓN.

- (1) Sean $x \in \mathcal{F}^+$, $y \in \mathcal{F}^-$, entonces $Jx = x$ y por lo tanto

$$\langle x, y \rangle_J = \langle Jx, y \rangle = \langle x, y \rangle = 0.$$

- (2) Sea $x \in \mathcal{F}$, entonces

$$\|Jx\|_J^2 = \langle Jx, Jx \rangle_J = \langle J^2x, Jx \rangle = \langle x, Jx \rangle = \langle Jx, x \rangle = \langle x, x \rangle_J = \|x\|_J^2.$$

□

LEMA 1.24. Sea J la simetría fundamental correspondiente a la descomposición $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+(\dot{+})\mathcal{F}^-$ entonces para todo $x, y \in \mathcal{F}$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_J \|y\|_J,$$

DEMOSTRACIÓN. $|\langle x, y \rangle| = |\langle Jx, Jy \rangle| = |\langle x, Jy \rangle_J| \leq \|x\|_J \|Jy\|_J = \|x\|_J \|y\|_J$. $\square$

Por Lema 1.24 podemos concluir que la topología inducida por $\|\cdot\|_J$ es una mayorante cuadrática.

TEOREMA 1.25. *Si P^+ y P^- los proyectores fundamentales asociados a la descomposición $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+(\dot{+})\mathcal{F}^-$, entonces*

$$\|P^+x\|_J \leq \|x\|_J \quad y \quad \|P^-x\|_J \leq \|x\|_J \quad \text{para todo } x \in \mathcal{F}.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos la primera desigualdad, la segunda es completamente análoga.

$$\begin{aligned} \|P^+x\|_J &= (\langle P^+x, x^+ \rangle_J)^{1/2} \\ &= \langle JP^+x, x^+ \rangle^{1/2} \\ &= \langle Jx^+, x^+ \rangle^{1/2} \\ &\leq \langle Jx, x \rangle^{1/2} \\ &= (\langle x, x \rangle_J)^{1/2} \\ &= \|x\|_J. \end{aligned}$$

$\square$

5. Descomposición fundamental y completitud

LEMA 1.26. *Sea $\mathcal{F}$ un espacio con producto interno, no degenerado y descomponible. Sean*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1^+(\dot{+})\mathcal{F}_1^-, \quad \mathcal{F}_1^+ \subseteq \mathcal{B}^{++}, \quad \mathcal{F}_1^- \subseteq \mathcal{B}^{--}$$

y

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_2^+(\dot{+})\mathcal{F}_2^-, \quad \mathcal{F}_2^+ \subseteq \mathcal{B}^{++}, \quad \mathcal{F}_2^- \subseteq \mathcal{B}^{--},$$

dos descomposiciones fundamentales de $\mathcal{F}$.

Si $(\mathcal{F}_1^+, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathcal{F}_1^-, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$ son espacios de Hilbert, para $q = 1, 2$ sea J_q la simetría fundamental correspondiente a la descomposición fundamental $\mathcal{F} = \mathcal{F}_q^+(\dot{+})\mathcal{F}_q^-$ y sea τ_{J_q} la topología mayorante de descomposición que corresponde con la J_q -norma, $\|\cdot\|_{J_q}$.

a) *Existe una constante $c_1 > 0$ tal que*

$$\|x^+\|_{J_2} \leq c_1 \|x^+\|_{J_1} \quad \text{para todo } x^+ \in \mathcal{F}_1^+.$$

b) *Existe una constante $c_2 > 0$ tal que*

$$\|x^-\|_{J_2} \leq c_2 \|x^-\|_{J_1} \text{ para todo } x^- \in \mathcal{F}_1^-.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos parte a), por el Lema 1.24 se tiene que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_{J_2} \|y\|_{J_2}.$$

Para $y \in \mathcal{F}$, sea $\psi_y : \mathcal{F}_1^+ \rightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$\psi_y(x^+) = \langle x^+, y \rangle,$$

entonces para cada $x^+ \in \mathcal{F}_1^+$ se tiene que

$$\sup\{|\psi_y(x^+)| : y \in \mathcal{F}, \|y\|_{J_2} \leq 1\} < +\infty.$$

Del principio de acotación uniforme se deduce que

$$\sup\{\|\psi_y\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}_1^+, \mathbb{C})} : y \in \mathcal{F}, \|y\|_{J_2} \leq 1\} < +\infty,$$

es decir existe $\beta > 0$ tal que para todo $y \in \mathcal{F}$ tal que $\|y\|_{J_2} \leq 1$ y para todo $x^+ \in \mathcal{F}^+$ se cumple que

$$|\langle x^+, y \rangle| = |\psi_y(x^+)| \leq \beta \|x^+\|_{J_1}.$$

Si $x^+ \in \mathcal{F}^+$ entonces

$$\|x^+\|_{J_2} = \sup_{\|y\|_{J_2} \leq 1} |\langle x^+, y \rangle_{J_2}|.$$

Como J_2 es un operador $\langle \cdot, \cdot \rangle_{J_2}$ -unitario se tiene que

$$\begin{aligned} \|x^+\|_{J_2} &= \sup_{\|y\|_{J_2} \leq 1} |\langle x^+, y \rangle_{J_2}| \\ &= \sup_{\|y\|_{J_2} \leq 1} |\langle x^+, J_2 y \rangle| \\ &= \sup_{\|J_2 y\|_{J_2} \leq 1} |\langle x^+, J_2 y \rangle| \\ &= \sup_{\|z\|_{J_2} \leq 1} |\langle x^+, z \rangle| \leq \beta \|x^+\|_{J_1}. \end{aligned}$$

La parte b) se deduce de la parte a), cambiándole el signo al producto interno.

□

TEOREMA 1.27. *Sea $\mathcal{F}$ un espacio con producto interno, no degenerado y descomponible.*

Sean

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \mathcal{F}_1^+(\dot{+})\mathcal{F}_1^-, \quad \mathcal{F}_1^+ \subseteq \mathcal{B}^{++}, \quad \mathcal{F}_1^- \subseteq \mathcal{B}^{--} \quad y \\ \mathcal{F} &= \mathcal{F}_2^+(\dot{+})\mathcal{F}_2^-, \quad \mathcal{F}_2^+ \subseteq \mathcal{B}^{++}, \quad \mathcal{F}_2^- \subseteq \mathcal{B}^{--},\end{aligned}$$

dos descomposiciones fundamentales de $\mathcal{F}$.

Si $(\mathcal{F}_1^+, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathcal{F}_1^-, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$ son espacios de Hilbert, entonces $(\mathcal{F}_2^+, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathcal{F}_2^-, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$ también son espacios de Hilbert y las normas hilbertianas inducidas por ambas descomposiciones son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN. Para $q = 1, 2$ sea J_q la simetría fundamental correspondiente a la descomposición fundamental $\mathcal{F} = \mathcal{F}_q^+(\dot{+})\mathcal{F}_q^-$ y sea τ_{J_q} la topología mayorante de descomposición que corresponde con la J_q -norma, $\|\cdot\|_{J_q}$. Basta probar que las normas $\|\cdot\|_{J_1}$ y $\|\cdot\|_{J_2}$ son equivalentes.

Para esto, veremos que

(1) Existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\|x\|_{J_2} \leq \alpha \|x\|_{J_1} \quad \text{para todo } x \in \mathcal{F}.$$

(2) Existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$\|x^+\|_{J_2} \leq \beta \|x\|_{J_2} \quad \text{para todo } x \in \mathcal{F}.$$

(3) Existe una constante $\gamma > 0$ tal que

$$\|x\|_{J_1} \leq \gamma \|x\|_{J_2} \quad \text{para todo } x \in \mathcal{F}.$$

Veamos (1), para $x \in \mathcal{F}$ sea $x = x^+ + x^-$ la descomposición correspondiente a la suma $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1^+(\dot{+})\mathcal{F}_1^-$ entonces

$$\begin{aligned}\|x\|_{J_2}^2 &\leq (\|x^+\|_{J_2} + \|x^-\|_{J_2})^2 \\ &\leq (c_1\|x^+\|_{J_1} + c_2\|x^-\|_{J_1})^2 \\ &\leq (\max\{c_1, c_2\})^2 (\|x^+\|_{J_1} + \|x^-\|_{J_1})^2 \\ &\leq 2(\max\{c_1, c_2\})^2 (\|x^+\|_{J_1}^2 + \|x^-\|_{J_1}^2) \\ &= 2(\max\{c_1, c_2\})^2 \|x\|_{J_1}^2.\end{aligned}$$

Veamos (2), por lo hecho en el lema anterior,

$$\|x^+\|_{J_2}^2 \leq c_1^2 \|x^+\|_{J_1}^2 = c_1^2 \langle x^+, x^+ \rangle = c_1^2 \langle x^+, x \rangle \leq c_1^2 \|x^+\|_{J_2} \|x\|_{J_2},$$

de donde

$$\|x^+\|_{J_2} \leq c_1^2 \|x\|_{J_2}.$$

Veamos (3), para $x \in \mathcal{F}$, sea $x = x^+ + x^-$ la descomposición correspondiente a la suma $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1^+(\dot{+})\mathcal{F}_1^-$, entonces

$$\begin{aligned} \|x\|_{J_1}^2 &\leq \|J_1 x\|_{J_2} \|x\|_{J_2} \\ &= \|2x^+ - x\|_{J_2} \|x\|_{J_2} \\ &\leq (2\|x\|_{J_2} + \|x\|_{J_2}) \|x\|_{J_2} \\ &\leq (2\beta + 1) \|x\|_{J_2}^2. \end{aligned}$$

□

6. Definición, caracterización básica y topología fuerte en espacios de Krein

DEFINICIÓN 1.28. Un *espacio de Krein* es un espacio $\mathcal{K}$ con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que admite una descomposición fundamental

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+(\dot{+})\mathcal{K}^-, \quad \mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{B}^{++}, \quad \mathcal{K}^- \subseteq \mathcal{B}^{--},$$

tal que $(\mathcal{K}^+, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathcal{K}^-, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$ son espacios de Hilbert.

Notación: En los textos y trabajos recientes relacionados con el tema de espacios con métrica indefinida es usual utilizar el símbolo $\oplus$ en vez del símbolo $(\dot{+})$. De ahora en adelante se usará esta notación, del contexto deberá siempre quedar claro con respecto a que producto se refiere la ortogonalidad. Es importante destacar que en espacios no degenerados no hay que distinguir entre suma directa ortogonal $\oplus$ ó $(\dot{+})$ y suma ortogonal.

A todo espacio de Krein se le puede asociar de manera natural un espacio de Hilbert de la siguiente manera: se consideran los espacios de Hilbert $\mathcal{K}^+$ y $\mathcal{K}^-$ y se hace su suma directa ortogonal.

EJEMPLO 1.29. Sea $\mathcal{K} = \mathbb{C}^2$ con el producto interno

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1 \overline{x_2} - y_1 \overline{y_2},$$

es decir si $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ entonces

$$\langle e_1, e_1 \rangle = 1, \quad \langle e_1, e_2 \rangle = 0, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -1.$$

Si se consideran

$$\mathcal{K}_1^+ = \{(x, 0) : x \in \mathbb{C}\}, \quad \mathcal{K}_1^- = \{(0, y) : y \in \mathbb{C}\}$$

entonces $(\mathcal{K}_1^+, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathcal{K}_1^-, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$ son espacios de Hilbert,

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{K}_1^+, \quad y \in \mathcal{K}_1^- \quad \text{y} \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+(\dot{+})\mathcal{K}_1^-.$$

Por lo tanto, $\mathbb{C}^2$ con este producto es un espacio de Krein.

Si se consideran

$$\mathcal{K}_2^+ = \{\lambda(2, 1) : \lambda \in \mathbb{C}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{K}_2^- = \{\lambda(1, 2) : \lambda \in \mathbb{C}\},$$

entonces también tenemos que $(\mathcal{K}_2^+, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathcal{K}_2^-, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$, son espacios de Hilbert,

$$\langle x, y \rangle = 0 \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{K}_2^+, \quad y \in \mathcal{K}_2^- \quad \text{y} \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_2^+(\dot{+})\mathcal{K}_2^-.$$

Este ejemplo que viene siendo el ejemplo no trivial más sencillo que se puede construir, ilustra que una descomposición de la forma $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+(\dot{+})\mathcal{K}^-$, no necesariamente es única.

Sin embargo se satisfacen los siguientes resultados:

Si $\mathcal{K}$ es un espacio de Krein y $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+(\dot{+})\mathcal{K}_1^-$, y $\mathcal{K} = \mathcal{K}_2^+(\dot{+})\mathcal{K}_2^-$ son dos descomposiciones fundamentales, entonces:

$$\dim(\mathcal{K}_1^+) = \dim(\mathcal{K}_2^+) \quad \text{y} \quad \dim(\mathcal{K}_1^-) = \dim(\mathcal{K}_2^-)$$

y las topologías de los espacios

$$\mathcal{K}_1^+(\dot{+})|\mathcal{K}_1^-| \quad \text{y} \quad \mathcal{K}_2^+(\dot{+})|\mathcal{K}_2^-|$$

son equivalentes.

Del Lema 1.19 y el Teorema 1.27, se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA 1.30. *Un espacio de Krein es no degenerado y descomponible. Si $\mathcal{K}$ es un espacio de Krein y*

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$$

es una descomposición fundamental, entonces

$$(\mathcal{K}^+, \langle \cdot, \cdot \rangle) \quad y \quad (\mathcal{K}^-, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$$

son espacios de Hilbert.

Si $|\mathcal{K}^-|$ denota el anti-espacio de $\mathcal{K}^-$ se tiene que

$$|\mathcal{K}| = \mathcal{K}^+ \oplus |\mathcal{K}^-|,$$

es un espacio de Hilbert. Este espacio de Hilbert tiene un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{|\mathcal{K}|}$ y una norma $\| \cdot \|_{|\mathcal{K}|}$.

Por el Teorema 1.27 dos descomposiciones fundamentales dan origen a normas equivalentes y por lo tanto dan origen a la misma topología. Esta topología es la que se conoce como *topología fuerte*. Además se cumple

$$|\langle x, y \rangle_{\mathcal{K}}| \leq \|x\|_{|\mathcal{K}|} \|y\|_{|\mathcal{K}|} \text{ para todo } x, y \in \mathcal{K}.$$

En general, los conceptos de convergencia, continuidad, etc en un espacio de Krein se refieren a esta topología.

Si un espacio de Krein admite una descomposición de la forma $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+(\dot{+})\mathcal{K}^-$ y uno de los espacios $\mathcal{K}^+$ o $\mathcal{K}^-$ es de dimensión finita, se dice que $\mathcal{K}$ es un espacio de *Pontryagin*. Este caso es de particular interés, muchos de los problemas que se presentan en espacios de Krein generales son mucho más simples en espacios de Pontryagin.

7. Funcionales lineales continuos en espacios de Krein

Sea $(\mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Krein, que admite una descomposición fundamental, dada por

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+(\dot{+})\mathcal{K}^-, \quad \mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{B}^{++}, \quad \mathcal{K}^- \subseteq \mathcal{B}^{--},$$

sea J la simetría fundamental asociada a la descomposición y $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ es el producto hilbertiano que corresponde con la descomposición.

LEMA 1.31. Si $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$ es un subconjunto denso, $x \in \mathcal{K}$ y

$$\langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in \mathcal{M},$$

entonces $x = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Es importante destacar que el que $\mathcal{M}$ sea denso, lo que quiere decir es que $\mathcal{M}$ es denso en $|\mathcal{K}|$. Como el producto en $|\mathcal{K}|$ es $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$, se tiene que si $z \in \mathcal{K}$ y

$$\langle z, y \rangle_J = 0 \text{ para todo } y \in \mathcal{K},$$

entonces $z = 0$.

Como $\langle x, y \rangle = \langle Jx, y \rangle_J$ se tiene que $Jx = 0$ y por lo tanto $x = 0$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.32. *Dado un espacio de Krein $\mathcal{K}$ y $y \in \mathcal{K}$ sea $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$f(x) = \langle x, y \rangle_{\mathcal{K}} \text{ para todo } x \in \mathcal{K}$$

entonces f es un funcional lineal y continuo.

DEMOSTRACIÓN. Por la versión para espacios de Krein de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|f(x)| = |\langle x, y \rangle_{\mathcal{K}}| \leq \langle x, x \rangle_{|\mathcal{K}|} \langle y, y \rangle_{|\mathcal{K}|} = \|x\|_{|\mathcal{K}|} \|y\|_{|\mathcal{K}|}.$$

$\square$

El siguiente resultado extiende el teorema de representación de Riesz para espacios de Hilbert a espacios de Krein.

TEOREMA 1.33. *Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Krein y sea $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal y continuo. Entonces existe un único vector $y \in \mathcal{K}$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle_{\mathcal{K}} \text{ para todo } x \in \mathcal{K}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de la topología en $\mathcal{K}$ se tiene que $f : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal y continuo.

Por el teorema de representación de Riesz para espacios de Krein, existe $z \in \mathcal{K}$ tal que $f(x) = \langle x, z \rangle_J$ para todo $x \in \mathcal{K}$. Como

$$f(x) = \langle x, z \rangle_J = \langle Jx, z \rangle = \langle x, Jz \rangle,$$

tomando $y = Jz$ se obtiene el resultado de existencia.

La unicidad sigue de que $\mathcal{K}$ es no degenerado. $\square$

CAPÍTULO 2

Funciones y medidas en espacios de Krein.

Basados en [5], presentamos las funciones a valores vectores, funciones a valores operadores y medidas a valores operadores en espacios de Krein. Para ello presentamos primero los operadores, polinomios trigonométricos y transformada de Hilbert a valores en Krein.

1. Polinomios trigonométricos y transformada de Hilbert en espacios de Krein

Consideraremos a $(\mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}})$ espacio de Krein, con escalares complejos, $\| \cdot \|_{\mathcal{K}}$ la norma asociada.

Sea $\mathbb{T} \approx [0, 2\pi)$ el toro unidimensional y $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ la σ -álgebra de Borel de $\mathbb{T}$.

Sea $(\mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Krein, que admite una descomposición fundamental, dada por

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+(\dot{+})\mathcal{K}^-, \quad \mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{B}^{++}, \quad \mathcal{K}^- \subseteq \mathcal{B}^{--},$$

sea J la simetría fundamental asociada a la descomposición y $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ es el producto hilbertiano que corresponde con la descomposición.

Sea $|\mathcal{K}^-|$ denotando el anti-espacio de $\mathcal{K}^-$ se tiene que

$$|\mathcal{K}| = \mathcal{K}^+ \oplus |\mathcal{K}^-|,$$

es un espacio de Hilbert, con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{|\mathcal{K}|}$ y una norma $\| \cdot \|_{|\mathcal{K}|}$.

DEFINICIÓN 2.1. Un *polinomio trigonométrico* a valores en $\mathcal{K}$ es una función $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{K}$ tal que

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_n e_n(x),$$

donde $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{K}$ tiene soporte finito.

Sea $\mathcal{P}(\mathcal{K})$ el espacio de todos los polinomios trigonométricos.

Se define $\widehat{\varphi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{K}$ tal que

$$\widehat{\varphi}(n) = \xi_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

DEFINICIÓN 2.2. La *transformada de Hilbert* H se puede definir usando los coeficientes de Fourier para $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$,

$$(H\varphi)\widehat{}(n) = -i \operatorname{sgn}(n)\widehat{\varphi}(n),$$

donde

$$\operatorname{sgn}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

2. Funciones a valores vectores en espacios de Krein

Dados $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{K}$, $\zeta \in \mathcal{K}$ denotaremos por f_ζ a la función $f_\zeta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f_\zeta(x) = \langle \zeta, f(x) \rangle_{\mathcal{K}}.$$

DEFINICIÓN 2.3. Sea $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{K}$, f es *débilmente medible* si para todo $\zeta \in \mathcal{K}$, la función f_ζ es medible.

Note que $\mathcal{K}$ es separable por hipótesis, entonces la función $x \rightarrow \|f(x)\|_{|\mathcal{K}|}$ es medible. Para $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $L_{\mathcal{K}}^p(\mathbb{T})$ al conjunto de las funciones $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{K}$ tales que f es débilmente medible y

$$\int_{\mathbb{T}} \|f(x)\|_{|\mathcal{K}|}^p dx < \infty.$$

PROPOSICIÓN 2.4. Si $f \in L_{\mathcal{K}}^1(\mathbb{T})$ y $\zeta \in \mathcal{K}$ entonces $f_\zeta \in L^1(\mathbb{T})$.

DEMOSTRACIÓN. Si $f \in L_{\mathcal{K}}^1(\mathbb{T})$ y $\zeta \in \mathcal{K}$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz que se presentó en el Capítulo 1, vemos que,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |f_\zeta(x)| dx &= \int_0^{2\pi} |\langle \zeta, f(x) \rangle_{\mathcal{K}}| dx \\ &\leq \int_0^{2\pi} \|\zeta\|_{|\mathcal{K}|} \|f(x)\|_{|\mathcal{K}|} dx \\ &= \|\zeta\|_{|\mathcal{K}|} \int_0^{2\pi} \|f(x)\|_{|\mathcal{K}|} dx \\ &< \infty \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.5. Si $f \in L^1_{\mathcal{K}}(\mathbb{T})$ y $n \in \mathbb{Z}$ existe un vector $\xi_n \in \mathcal{K}$ tal que

$$\widehat{f}_{\zeta}(n) = \langle \zeta, \xi_n \rangle_{\mathcal{K}}$$

donde $\widehat{f}_{\zeta}(n)$ denota el coeficiente de Fourier de f_{ζ} .

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in L^1_{\mathcal{K}}(\mathbb{T})$ y $\zeta \in \mathcal{K}$, usando la proposición anterior, se tiene que $f_{\zeta} \in L^1(\pi)$ entonces existe $\widehat{f}_{\zeta}(n)$.

Sea $l_n : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$l_n(\zeta) = \widehat{f}_{\zeta}(n).$$

Entonces

$$\begin{aligned} l_n(\zeta) &= \int_0^{2\pi} e^{-inx} f_{\zeta}(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-inx} \langle \zeta, f(x) \rangle_{\mathcal{K}} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \langle \zeta, e^{inx} f(x) \rangle_{\mathcal{K}} dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto l_n es un funcional lineal.

Por la versión para espacios de Krein del teorema de representación de Riesz, tenemos que existe un vector $\xi_n \in \mathcal{K}$ tal que

$$l_n(\zeta) = \langle \zeta, \xi_n \rangle_{\mathcal{K}},$$

de donde,

$$\widehat{f}_{\zeta}(n) = \langle \zeta, \xi_n \rangle_{\mathcal{K}}.$$

□

DEFINICIÓN 2.6. El vector ξ_n de la proposición anterior se denota por $\widehat{f}(n)$ y es llamado el *coeficiente de Fourier de f* y la aplicación $n \rightarrow \widehat{f}(n)$ es llamada *transformada de Fourier de f* .

3. Funciones a valores operadores en espacios de Krein

Sea $L(\mathcal{K}) = \{T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}, \text{ lineal y continuo (con la topología fuerte)}\}$.

Dada una descomposición fundamental $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+(\dot{+})\mathcal{K}^-$ y $|\mathcal{K}^-|$ denota el anti-espacio de $\mathcal{K}^-$ se tiene que $|\mathcal{K}| = \mathcal{K}^+ \oplus |\mathcal{K}^-|$ es un espacio de Hilbert y sea J la simetría fundamental asociada a la descomposición. Sea $\zeta \in \mathcal{K}$, sea $T \in L(\mathcal{K})$, definimos

$$\|T\|_{L(|\mathcal{K}|)} = \sup_{\|\zeta\|_J=1} \|T(\zeta)\|_J.$$

Note que para todo $\zeta \in \mathcal{K}$ obtenemos,

$$\|T\zeta\|_{|\mathcal{K}|} \leq \|T\|_{L(|\mathcal{K}|)} \|\zeta\|_{|\mathcal{K}|}.$$

Dados $F : \mathbb{T} \rightarrow L(\mathcal{K})$, $\zeta, \xi \in \mathcal{K}$, denotaremos $F_{\zeta\xi}$ a la función a valores complejos $F_{\zeta\xi} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F_{\zeta\xi}(x) = \langle F(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}.$$

DEFINICIÓN 2.7. Sea $F : \mathbb{T} \rightarrow L(\mathcal{K})$, F es débilmente medible si para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{K}$ la función $F_{\zeta\xi}$ es medible.

Sea $F : \mathbb{T} \rightarrow L(\mathcal{K})$, débilmente medible, si $x \in \mathbb{T}$ entonces

$$\|F(x)\|_{L(|\mathcal{K}|)} = \sup_{\|\zeta\|_{\mathcal{K}}=\|\xi\|_{\mathcal{K}}=1} |\langle F(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}|.$$

Note que como $\mathcal{K}$ es separable por hipótesis, la función

$$x \rightarrow \|F(x)\|_{L(|\mathcal{K}|)}$$

es medible. Para $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $L_{L|\mathcal{K}|}^p(\mathbb{T})$ al conjunto de las funciones $F : \mathbb{T} \rightarrow L(\mathcal{K})$ tal que $\int_{\mathbb{T}} \|F(x)\|_{L(|\mathcal{K}|)}^p dx < \infty$ para alguna descomposición fundamental de $\mathcal{K}$ y el espacio de Hilbert asociado $|\mathcal{K}|$.

PROPOSICIÓN 2.8. Si $F \in L_{L(|\mathcal{K}|)}^1(\mathbb{T})$ y $\zeta, \xi \in \mathcal{K}$ entonces $F_{\zeta\xi} \in L^1(\mathbb{T})$.

DEMOSTRACIÓN. Si $F \in L^1_{L(|\mathcal{K}|)}(\mathbb{T})$ y $\zeta, \xi \in \mathcal{K}$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz vemos,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |F_{\zeta\xi}(x)| dx &= \int_0^{2\pi} |\langle F(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}| dx \\ &\leq \int_0^{2\pi} \|F(x)\zeta\|_{|\mathcal{K}|} \|\xi\|_{|\mathcal{K}|} dx \\ &\leq \int_0^{2\pi} \|F(x)\|_{L(|\mathcal{K}|)} \|\zeta\|_{|\mathcal{K}|} \|\xi\|_{|\mathcal{K}|} dx \\ &< \infty. \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.9. Si $F \in L^1_{L(|\mathcal{K}|)}(\mathbb{T})$, $\zeta, \xi \in \mathcal{K}$ y $n \in \mathbb{Z}$ existe una aplicación lineal continua $\widehat{F}(n) \in L(\mathcal{K})$ tal que

$$\widehat{F_{\zeta\xi}}(n) = \langle \widehat{F}(n)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $F \in L^1_{L(|\mathcal{K}|)}(\mathbb{T})$ y $\zeta, \xi \in \mathcal{K}, n \in \mathbb{Z}$, entonces $F_{\zeta\xi} \in L^1(\mathbb{T})$ por tanto existe $\widehat{F_{\zeta\xi}}(n)$.

Sea $l_{nF\zeta} : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $l_{nF\zeta}(\xi) = \widehat{F_{\zeta\xi}}(n)$ entonces

$$\begin{aligned} l_{nF\zeta}(\xi) &= \int_0^{2\pi} e^{-inx} F_{\zeta\xi}(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-inx} \langle F(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \langle e^{-inx} F(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto $l_{nF\zeta}$ es un funcional antilineal.

Por la versión del teorema de representación de Riesz para espacios de Krein, obtenemos que existe $Y_{nF\zeta} \in \mathcal{K}$ tal que

$$l_{nF\zeta}(\xi) = \langle Y_{nF\zeta}, \xi \rangle_{\mathcal{K}}.$$

Sea $\widehat{F}(n) : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ dada por $\widehat{F}(n)\zeta = Y_{nF\zeta}$ para $\zeta \in \mathcal{K}$.

Luego,

$$\langle \widehat{F}(n)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} = \langle Y_{nF\zeta}, \xi \rangle_{\mathcal{K}} = l_{nF\zeta}(\xi) = \widehat{F_{\zeta\xi}}(n)$$

□

4. Medidas a valores operadores en espacios de Krein

DEFINICIÓN 2.10. Una *medida a valores en* $L(\mathcal{K})$ es una función $\mu : B(\mathbb{T}) \rightarrow L(\mathcal{K})$ tal que para cada $\zeta, \xi \in \mathcal{K}$, $\Delta \in B(\mathbb{T})$, la función definida por

$$\mu_{\zeta\xi}(\Delta) = \langle \mu(\Delta)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}},$$

es una medida finita de Radon sobre $\mathbb{T}$ que toma valores escalares.

Un *operador* μ es *positivo* si $\langle \mu(\Delta)\xi, \xi \rangle_{\mathcal{K}} \geq 0$ para todo $\xi \in \mathcal{K}$. Si $\mu(\Delta)$ es un operador positivo para todo $\Delta \in B(\mathbb{T})$ decimos que la *medida* μ es *positiva*.

Consideremos el conjunto:

$$\mathcal{M}(\mathcal{K}) = \{\mu/\mu : B(\mathbb{T}) \rightarrow L(\mathcal{K}), \text{ una medida tal que } \sup_{\Delta \in B(\mathbb{T})} \|\mu(\Delta)\|_{L(|\mathcal{K}|)} < \infty\}.$$

Observemos que cada $W \in L^1_{L(\mathcal{K})}(\mathbb{T})$ da origen a una medida $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ mediante

$$d\langle \mu(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} = \langle W(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} dx = W_{\zeta\xi}(x) dx.$$

Como es natural la medida μ asociada a $W \in L^1_{L(\mathcal{K})}(\mathbb{T})$ será denotada $d\mu = W dx$. En este caso la medida μ es positiva si y sólo si $\langle W(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} \geq 0$ para casi todo x , es decir, el operador $W(x)$ es no negativo para casi todo x .

Denotemos por $\mathcal{P}$ el espacio vectorial de todos los polinomios trigonométricos definidos en $\mathbb{T}$ a valores escalares.

PROPOSICIÓN 2.11. Sea $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ y $c = \sup_{\Delta \in B(\mathbb{T})} \|\mu(\Delta)\|_{L(|\mathcal{K}|)}$. Entonces existe un único operador lineal $T_\mu : \mathcal{P} \rightarrow L(\mathcal{K})$ tal que

(a) Para todo $p \in \mathcal{P}, \zeta, \xi \in \mathcal{K}$ tenemos que

$$\langle T_\mu(p)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} = \int_0^{2\pi} p(x) d\langle \mu(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}.$$

(b) Para todo $p \in \mathcal{P}$ tenemos que

$$\|T_\mu(p)\|_{|\mathcal{K}|} \leq 4c\|p\|_\infty$$

DEMOSTRACIÓN.

(a) Para $\zeta, \xi \in \mathcal{K}$, sea

$$B(\zeta, \xi) = \int_0^{2\pi} p(x) d\langle \mu(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}.$$

Entonces B es sesquilineal sobre $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Usando la descomposición de Hahn (en parte real y parte imaginaria) obtenemos

$$\|B(\zeta, \xi)\| \leq 4c\|p\|_{\infty}\|\zeta\|_{\mathcal{K}}\|\xi\|_{\mathcal{K}}.$$

Para ζ fijo, sea $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(\xi) = B(\zeta, \xi) = \int_0^{2\pi} p(x) d\langle \mu(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}.$$

Dados $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{K}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$f(\lambda\xi_1 + \xi_2) = \bar{\lambda}f(\xi_1) + f(\xi_2).$$

Es decir, f es antilineal. Por la versión para espacios de Krein del teorema de representación de Riesz, existe $\theta \in \mathcal{K}$ tal que

$$f(\xi) = \langle \theta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}.$$

Sea $T_{\mu}(p) : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ tal que

$$T_{\mu}(p)\zeta = \theta.$$

Entonces

$$\langle T_{\mu}(p)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} = \langle \theta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} = f(\xi) = B(\zeta, \xi) = \int_0^{2\pi} p(x) d\langle \mu(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}.$$

(b) Como B es sesquilineal entonces $T_{\mu}(p)$ es lineal. Además de

$$\|\langle T_{\mu}(p)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}\| = \|B(\zeta, \xi)\| \leq 4c\|p\|_{\infty}\|\zeta\|_{\mathcal{K}}\|\xi\|_{\mathcal{K}}$$

se sigue que $T_{\mu}(p)$ es continuo y

$$\|T_{\mu}(p)\| \leq 4c\|p\|_{\infty}$$

□

Sea $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$, definimos $\hat{\mu} : \mathbb{Z} \rightarrow L(\mathcal{K})$ tal que

$$\hat{\mu}(n) = T_{\mu}(e_{-n}), n \in \mathbb{Z}.$$

PROPOSICIÓN 2.12. Si $\zeta, \xi \in \mathcal{K}$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\langle \widehat{\mu}(n)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} = \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\langle \mu(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} = \widehat{\mu}_{\zeta\xi}(n).$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\zeta, \xi \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\mu}(n)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} &= \langle T_{\mu}(e_{-n})\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \int_0^{2\pi} e_{-n}(x) d\langle \mu(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\mu_{\zeta\xi}(x) = \widehat{\mu}_{\zeta\xi}(n). \end{aligned}$$

□

Para $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$, $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$ definimos

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mu} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle \widehat{\mu}(m-n)\widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{K}}.$$

PROPOSICIÓN 2.13. Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$, $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$ entonces

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mu} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} d\langle \mu(x)\widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{K}}.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle_{\mu} &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle \widehat{\mu}(m-n)\widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} d\langle \mu(x)\widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

□

En el caso escalar $\mathcal{K} = \mathbb{C}$ obtenemos que

$$\langle p, q \rangle_{\mu} = \int_0^{2\pi} p(x) \overline{q(x)} d\mu(x) \quad \text{con } p, q \in \mathcal{P}.$$

PROPOSICIÓN 2.14. Supongamos que $d\mu = Wdx$, $W \in L^1_{L(\mathcal{K})}(\mathbb{T})$. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$ entonces

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mu} = \int_0^{2\pi} \langle W(x)\varphi(x), \psi(x) \rangle_{\mathcal{K}} dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$ entonces

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n) e^{inx}, \quad \psi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}(m) e^{imx}$$

de donde

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle_\mu &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} d\langle \mu(x) \widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \langle W(x) \widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{K}} dx \\ &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-imx} e^{inx} \langle W(x) \widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{K}} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle W(x) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n) e^{inx}, \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}(m) e^{imx} \right\rangle_{\mathcal{K}} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \langle W(x) \varphi(x), \psi(x) \rangle_{\mathcal{K}} dx. \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.15. Sea $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ entonces

- a) $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$ es sesquilineal en $\mathcal{P}(\mathcal{K})$.
- b) $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$ es no negativa si y sólo si μ es una medida positiva.

DEMOSTRACIÓN. La parte a) se sigue de la definición de $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$. En efecto, si φ, ψ y $\gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$ entonces

$$\begin{aligned} \langle \varphi + \gamma, \psi \rangle_\mu &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle \widehat{\mu}(m-n)(\widehat{\varphi}(n) + \widehat{\gamma}(n)), \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle \widehat{\mu}(m-n) \widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{K}} + \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle \widehat{\mu}(m-n) \widehat{\gamma}(n), \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \langle \varphi, \psi \rangle_\mu + \langle \gamma, \psi \rangle_\mu. \end{aligned}$$

La parte b) es una aplicación directa del Lema 1 de [1].

□

Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$, $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$ escribimos

$$\int_0^{2\pi} \langle d\mu(x) \varphi(x), \psi(x) \rangle_{\mathcal{K}} = \langle \varphi, \psi \rangle_\mu.$$

PROPOSICIÓN 2.16. Sea $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$, $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\langle e_n \varphi, e_n \psi \rangle_\mu = \langle \varphi, \psi \rangle_\mu$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \langle e_n \varphi, e_n \psi \rangle_\mu &= \sum_{m,j \in \mathbb{Z}} \langle \widehat{\mu}(m-j) e_n \widehat{\varphi}(j), e_n \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \sum_{m,j \in \mathbb{Z}} e^{-inx} e^{inx} \langle \widehat{\mu}(m-j) \widehat{\varphi}(j), \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \sum_{m,j \in \mathbb{Z}} e^{-i(n-n)x} \langle \widehat{\mu}(m-j) \widehat{\varphi}(j), \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \langle \varphi, \psi \rangle_\mu. \end{aligned}$$

□

Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ es una medida positiva usaremos $\| \cdot \|_\mu$ para denotar la norma (posiblemente degenerada) asociada a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$.

PROPOSICIÓN 2.17. Sea $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ medida positiva, $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\|e_n \varphi\|_\mu = \|\varphi\|_\mu.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\|e_n \varphi\|_\mu^2 = \langle e_n \varphi, e_n \varphi \rangle_\mu = \langle \varphi, \varphi \rangle_\mu = \|\varphi\|_\mu^2.$$

De donde,

$$\|e_n \varphi\|_\mu = \|\varphi\|_\mu.$$

□

Sea

$$\mathcal{M}(\mathcal{K})_+ = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K}) : \widehat{\mu}(n) = 0 \text{ si } n < 0\}.$$

Observe que si $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})_+$ y $\zeta, \xi \in \mathcal{K}$, entonces para la medida escalar $\mu_{\zeta\xi}$ tenemos que

$$\widehat{\mu_{\zeta\xi}}(n) = 0 \text{ para } n < 0.$$

Por el teorema de F. y M. Riesz, existe $h_{\zeta\xi} \in H^1(\mathbb{T})$ tal que

$$(2.1) \quad d\mu_{\zeta\xi}(x) = h_{\zeta\xi}(x) dx.$$

CAPÍTULO 3

Una versión del teorema de Helson y Szegö a valores operadores en espacios de Krein.

En este capítulo se presenta el principal resultado de este trabajo, el cual es una versión del teorema de Helson - Szegö a valores operadores para espacios de Krein.

Los resultados y las definiciones de este capítulo son versiones para espacios de Krein de los dados en [5] para espacios de Hilbert.

1. Extensión a valores operadores del teorema de Helson y Szegö en Krein.

Daremos caracterizaciones de los $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$, tales que $d\mu = Wdx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{K})}(\mathbb{T})$ y

$$\langle H\varphi, H\varphi \rangle_\mu \leq M^2 \langle \varphi, \varphi \rangle_\mu$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$. Es decir,

$$\int_0^{2\pi} \langle W(x)H\varphi(x), H\varphi(x) \rangle_{\mathcal{K}} dx \leq M^2 \int_0^{2\pi} \langle W(x)\varphi(x), \varphi(x) \rangle_{\mathcal{K}} dx$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$.

El grupo dual de $\mathbb{T}$ es el grupo de los enteros $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Consideremos los conjuntos $\mathbb{Z}_1 = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$ y $\mathbb{Z}_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$.

Sean

$$\mathcal{P}_1(\mathcal{K}) = \{\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{K}) : \widehat{\varphi}(n) = 0 \text{ si } n < 0\}, \text{ y}$$

$$\mathcal{P}_2(\mathcal{K}) = \{\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{K}) : \widehat{\varphi}(n) = 0 \text{ si } n \geq 0\}.$$

Para $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ positivo y n un entero no negativo, sea

$$\rho_n(\mu) = \sup\{|\langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu| : \varphi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{K}), \varphi_2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{K}), \|\varphi_1\|_\mu = \|\varphi_2\|_\mu = 1\}$$

Sea $\rho_n(W) = \rho_n(\mu)$ cuando $d\mu = Wdx$, para $W \in L^1_{L(\mathcal{K})}(\mathbb{T})$.

Es claro que $0 \leq \rho_n(\mu) \leq 1$.

Consideremos ahora la clausura de $\overline{e_n \mathcal{P}_1(\mathcal{K})}$ y $\overline{\mathcal{P}_2(\mathcal{K})}$ con respecto a $\|\cdot\|_\mu$. Usualmente $\overline{\mathcal{P}_2(\mathcal{K})}$ es llamado el pasado, $\overline{\mathcal{P}_1(\mathcal{K})}$ es llamado el futuro después del instante n , todos con respecto a $\|\cdot\|_\mu$.

Observemos que:

- (a) Los espacios $\mathcal{P}_1(\mathcal{K})$ y $\mathcal{P}_2(\mathcal{K})$ son ortogonales con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$ si y sólo si $\rho_0(\mu) = 0$.
- (b) Si existe un vector no nulo en $\overline{\mathcal{P}_1(\mathcal{K})}$ y $\overline{\mathcal{P}_2(\mathcal{K})}$ entonces $\rho_0(\mu) = 1$.

Recordemos: se dice que los subespacios cerrados en $\overline{e_n \mathcal{P}_1(\mathcal{K})}$ y $\overline{\mathcal{P}_2(\mathcal{K})}$ tienen un ángulo positivo si $\rho_0(\mu) < 1$. El ángulo entre estos subespacios es $\alpha_n(\mu) = \arccos(\rho_n(\mu))$.

PROPOSICIÓN 3.1. Sean $M \geq 1$, $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$, tal que $d\mu = Wdx$ para alguna $W \in L^1_{L(\mathcal{K})}(\mathbb{T})$. Sea $\varphi = e_n \varphi_1 + \varphi_2$ donde $\varphi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{K})$ y $\varphi_2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{K})$, entonces

$$\frac{1}{M^2 + 1} (M^2 \langle \varphi, \varphi \rangle_\mu - \langle H\varphi, H\varphi \rangle_\mu) = (\langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_\mu) + \frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} (\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_\mu).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi = e_n \varphi_1 + \varphi_2$ donde $\varphi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{K})$ y $\varphi_2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{K})$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \varphi \rangle_\mu &= \langle e_n \varphi_1 + \varphi_2, e_n \varphi_1 + \varphi_2 \rangle_\mu \\ &= \langle e_n \varphi_1, e_n \varphi_1 \rangle_\mu + \langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_\mu \\ &= |e_n| \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_\mu + \langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_\mu \\ (3.1) \quad &= \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_\mu + \langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_\mu \end{aligned}$$

Por otro lado si $\varphi_1 \in \mathcal{P}_1$ entonces

$$\varphi_1 = \sum_{k=0}^N \xi_k e_k,$$

donde

$$\widehat{\varphi_1}(k) = \begin{cases} \xi_k & \text{si } 0 \leq k \leq N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

luego

$$(H\varphi_1)\widehat{(k)} = \begin{cases} -i\widehat{\varphi_1}(k) = -i\xi_k & \text{si } 0 \leq k \leq N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en consecuencia

$$H\varphi_1 = -i \sum_{k=0}^N \xi_k e_k = -i\varphi_1.$$

En forma similar si $\varphi_2 \in \mathcal{P}_2$ entonces

$$\varphi_2 = \sum_{k=-N}^{-1} \xi_k e_k,$$

donde

$$\widehat{\varphi_2}(k) = \begin{cases} \xi_k & \text{si } -N \leq k \leq -1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

luego

$$(H\varphi_2)\widehat{(k)} = \begin{cases} -i\widehat{\varphi_2}(k) = -i\xi_k & \text{si } -N \leq k \leq -1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en consecuencia

$$H\varphi_2 = -i \sum_{k=-N}^{-1} \xi_k e_k = i\varphi_2.$$

A partir de lo obtenido para $H\varphi_1$ y $H\varphi_2$ obtenemos

$$H\varphi = H(e_n\varphi_1 + \varphi_2) = -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle H\varphi, H\varphi \rangle_\mu &= \langle -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2, -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2 \rangle_\mu \\ &= \langle -ie_n\varphi_1, -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2 \rangle_\mu + \langle i\varphi_2, -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2 \rangle_\mu \\ &= \langle -ie_n\varphi_1, -ie_n\varphi_1 \rangle_\mu + \langle -ie_n\varphi_1, i\varphi_2 \rangle_\mu + \langle i\varphi_2, -ie_n\varphi_1 \rangle_\mu \\ &= \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_\mu - \langle e_n\varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu - \langle \varphi_2, e_n\varphi_1 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_\mu. \end{aligned}$$

Luego

$$(3.2) \quad -\langle H\varphi, H\varphi \rangle_\mu = -\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_\mu + \langle e_n\varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n\varphi_1 \rangle_\mu - \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_\mu.$$

Multiplicando por M^2 la ecuación (3.1) y usando la ecuación (3.2), obtenemos que:

$$\begin{aligned} M^2 \langle \varphi, \varphi \rangle_\mu - \langle H\varphi, H\varphi \rangle_\mu &= (M^2 - 1) \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_\mu + (M^2 + 1) \langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu \\ &\quad + (M^2 + 1) \langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_\mu + (M^2 - 1) \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_\mu \\ &= (M^2 + 1) [\langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_\mu] \\ &\quad + (M^2 - 1) (\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_\mu). \end{aligned}$$

De donde,

$$\frac{1}{M^2 + 1} (M^2 \langle \varphi, \varphi \rangle_\mu - \langle H\varphi, H\varphi \rangle_\mu) = (\langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_\mu) + \frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} (\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_\mu)$$

□

Sea $\mu_{\alpha\beta} \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Usaremos la notación $\{\mu_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ para referirnos a

$$\begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix}$$

Consideraremos matrices tales que $\mu_{12} = \mu_{21}^*$ está definida por

$$\langle \mu_{21}^*(\Delta) \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} = \langle \zeta, \mu_{21}(\Delta) \xi \rangle_{\mathcal{K}},$$

donde $*$ es el operador adjunto en el espacio de Krein.

DEFINICIÓN 3.2. Sea $\mu_{\alpha\beta} \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Se dice que la matriz $\{\mu_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es *positiva* cuando

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle_{\mu_{\alpha,\beta}} \geq 0$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}(\mathcal{K}) \times \mathcal{P}(\mathcal{K})$.

LEMA 3.3. Sea $\mu_{\alpha\beta} \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) La matriz $\{\mu_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es positiva.
- (b) Para todo Δ en $\mathcal{B}(\mathbb{T})$, para todo $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{K}$

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \langle \mu_{\alpha\beta}(\Delta) \zeta_\alpha, \zeta_\beta \rangle_{\mathcal{K}} \geq 0$$

- (c) Para todo Δ en $\mathcal{B}(\mathbb{T})$, para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{K} : \langle \mu_{11}(\Delta) \zeta, \zeta \rangle_{\mathcal{K}} \geq 0$, $\langle \mu_{22}(\Delta) \xi, \xi \rangle_{\mathcal{K}} \geq 0$ y

$$|\langle \mu_{12}(\Delta) \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}|^2 \leq \langle \mu_{11}(\Delta) \zeta, \zeta \rangle_{\mathcal{K}} \langle \mu_{22}(\Delta) \xi, \xi \rangle_{\mathcal{K}}$$

(d) Para todo Δ en $\mathcal{B}(\mathbb{T})$, para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{K} : \langle \mu_{11}(\Delta)\zeta, \zeta \rangle_{\mathcal{K}} \geq 0$, $\langle \mu_{22}(\Delta)\xi, \xi \rangle_{\mathcal{K}} \geq 0$ y

$$2|\langle \mu_{12}(\Delta)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}| \leq \langle \mu_{11}(\Delta)\zeta, \zeta \rangle_{\mathcal{K}} + \langle \mu_{22}(\Delta)\xi, \xi \rangle_{\mathcal{K}}$$

Para la demostración ver [2], Lema 3.

DEFINICIÓN 3.4. Sea $\mu_{\alpha\beta} \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Se dice que la matriz $\{\mu_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1,2}$ es *débilmente positiva* cuando

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \langle \varphi_{\alpha}, \varphi_{\beta} \rangle_{\mu_{\alpha\beta}} \geq 0$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{K}) \times \mathcal{P}_2(\mathcal{K})$.

Cuando se trata de medidas absolutamente continuas con respecto de la medida de Lebesgue, estas condiciones se pueden expresar en términos de las densidades.

Para $\mu_{\alpha\beta} = z_{\alpha\beta}(x)dx$ la expresión “ $\{z_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1,2}$ es una matriz positiva” quiere decir $\{\mu_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1,2}$ es una matriz positiva. Análogamente para matrices débilmente positivas.

LEMA 3.5. Sea $\mu_{\alpha\beta} \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Las medidas μ_{11} y μ_{22} son positivas y

$$|\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mu_{12}}|^2 \leq \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_{\mu_{11}} \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_{\mu_{22}}$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{K}) \times \mathcal{P}_2(\mathcal{K})$.

(b) La matriz $\{\mu_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1,2}$ es débilmente positiva.

DEMOSTRACIÓN. Cambiando φ_1 por $\lambda_1 \varphi_1$ y φ_2 por $\lambda_2 \varphi_2$ la desigualdad de la Definición 3.4 se transforma en

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \varphi_{\alpha} \overline{\varphi_{\beta}} \langle \varphi_{\alpha}, \varphi_{\beta} \rangle_{\mu_{\alpha\beta}} \geq 0$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{K}) \times \mathcal{P}_2(\mathcal{K})$, es decir, la forma cuadrática en λ_1 y λ_2 , dada por la expresión anterior, es definida positiva. Esto es equivalente a la condición (a). $\square$

Los siguientes teoremas son los principales resultados de este trabajo. Son versiones para espacios de Krein del teorema 3.1 de [5]. En el caso $n = 0$ estos resultados son generalizaciones del teorema de Helson - Szegö.

TEOREMA 3.6. Sean $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ y $M \geq 1$. Para $\Delta \in B(\mathbb{T})$ sean

$$\begin{aligned}\mu_{11}(\Delta) &= \mu_{22}(\Delta) = \frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \mu(\Delta) \\ \mu_{12}(\Delta) &= \int_{\Delta} e_n(x) d\mu(x) \\ \mu_{21}(\Delta) &= \int_{\Delta} e_{-n}(x) d\mu(x).\end{aligned}$$

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Para todo $\varphi \in e_n \mathcal{P}_1(\mathcal{K}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{K})$

$$\langle H\varphi, H\varphi \rangle_{\mu} \leq M^2 \langle \varphi, \varphi \rangle_{\mu}.$$

(b) Existe una medida $\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})_+$ tal que

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \langle \varphi_{\alpha}, \varphi_{\beta} \rangle_{\mu_{\alpha\beta}} + \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\nu} + \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle_{\nu^*} \geq 0$$

para toda $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$.

DEMOSTRACIÓN.

Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$ se puede probar que

$$\langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mu} = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mu_{12}}.$$

Análogamente,

$$\langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_{\mu} = \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle_{\mu_{21}}.$$

Para $\alpha = 1, 2$, también se puede ver que

$$\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \langle \varphi_{\alpha}, \varphi_{\alpha} \rangle_{\mu} = \langle \varphi_{\alpha}, \varphi_{\alpha} \rangle_{\mu_{\alpha\alpha}}.$$

(a) $\Rightarrow$ (b) Sea $\varphi = e_n \varphi_1 + \varphi_2$ donde $\varphi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{K})$ y $\varphi_2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{K})$ tal que

$$\langle H\varphi, H\varphi \rangle_{\mu} \leq M^2 \langle \varphi, \varphi \rangle_{\mu}.$$

De la Proposición 3.1 se sigue que

$$(3.3) \quad (\langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mu} + \langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_{\mu} + \frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} (\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_{\mu} + \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_{\mu})) \geq 0$$

De la desigualdad (3.3) tenemos que:

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mu_{12}} + \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle_{\mu_{21}} + \frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} (\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_{\mu} + \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_{\mu}) \geq 0$$

De donde

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mu_{12}} + \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle_{\mu_{21}} + \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_{\mu_{11}} + \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_{\mu_{22}} \geq 0.$$

Es decir,

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle_{\mu_{\alpha\beta}} \geq 0$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{K}) \times \mathcal{P}_2(\mathcal{K})$. Por lo tanto la matriz $\{\mu_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1,2}$ es una matriz débilmente positiva.

Una aplicación directa del Teorema II de [2] proporciona una medida $\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})_+$ tal que

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle_{\mu_{\alpha\beta}} + \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\nu + \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle_{\nu^*} \geq 0$$

para $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Para completar la demostración, notemos que en los pasos de la demostración de (a) $\Rightarrow$ (b) tenemos condiciones equivalentes. $\square$

TEOREMA 3.7. *Sea $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$ positivo, supongamos que $d\mu = Wdx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{K})}(\mathbb{T})$ y sea $M \geq 1$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) $0 < \rho_n(W) \leq \frac{M^2-1}{M^2+1}$.
- (b) Para todo $\varphi \in e_n \mathcal{P}_1(\mathcal{K}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{K})$

$$\|H\varphi\|_\mu \leq M\|\varphi\|_\mu.$$

- (c) Existe $\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})_+$ tal que para cada $\zeta, \xi \in \mathcal{K}$

$$d\nu_{\zeta\xi}(x) = h_{\zeta\xi}(x)dx,$$

donde $h_{\zeta\xi} \in H^1(\mathbb{T})$ y

$$(M^2 + 1)^2 |e_n(x)W_{\zeta\xi}(x) - h_{\zeta\xi}(x)|^2 \leq (M^2 - 1)^2 W_{\zeta\zeta}(x)W_{\xi\xi}(x) \quad c.s$$

DEMOSTRACIÓN. (b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que

$$\|H\varphi\|_\mu \leq M\|\varphi\|_\mu,$$

para todo $\varphi \in e_n \mathcal{P}_1(\mathcal{K}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{K})$. Usando la Proposición 3.1 se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{M^2 + 1} (M^2 \|\varphi\|_\mu^2 - \|H\varphi\|_\mu^2) \\ &= (\langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_\mu) + \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \right) (\|\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2) \\ &= 2\operatorname{Re} \langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu + \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \right) (\|\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2) \end{aligned}$$

Si consideramos $\lambda \in \mathbb{C}$ y $s \in \mathbb{R}$, con $|\lambda| = 1$, se cumple que $\lambda s \varphi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{K})$ y además

$$\begin{aligned} &\left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \right) \|\varphi_1\|_\mu^2 s^2 + (2\operatorname{Re}(\lambda \langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu))s + \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \right) \|\varphi_2\|_\mu^2 = \\ &2\operatorname{Re}(\lambda \langle e_n s \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu) + \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \right) (\|s \varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Esta es una inecuación de segundo grado en la variable s . Sea D el discriminante,

$$D = 4[\lambda \langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu + \bar{\lambda} \langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_\mu]^2 - 4 \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \right)^2 \|\varphi_1\|_\mu^2 \|\varphi_2\|_\mu^2 \leq 0.$$

Esto equivale a

$$[\lambda \langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu + \bar{\lambda} \langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_\mu]^2 \leq \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \right)^2 \|\varphi_1\|_\mu^2 \|\varphi_2\|_\mu^2.$$

Si $\|\varphi_1\|_\mu = \|\varphi_2\|_\mu = 1$ entonces

$$\lambda \langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu + \bar{\lambda} \langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_\mu \leq \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \right).$$

En particular para $\lambda = e^{-i \arg(\langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu)}$, se tiene que

$$\lambda \langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu = |\langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_\mu| = \bar{\lambda} \langle \varphi_2, e_n \varphi_1 \rangle_\mu$$

Por tanto

$$|\langle e_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\mu| \leq \frac{M^2 - 1}{M^2 + 1}.$$

Tomando supremo a ambos lados y considerando que el cociente anterior es una constante, se obtiene el resultado deseado

$$\rho_n(\mu) \leq \frac{M^2 - 1}{M^2 + 1}.$$

(a) $\Rightarrow$ (b) Esta implicación también se obtiene usando el discriminante de una ecuación de segundo grado.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $\Delta \in B(\mathbb{T})$. Consideremos las cuatro medidas absolutamente continuas con respecto a μ dadas por:

$$\begin{aligned}\mu_{11}(\Delta) &= \mu_{22}(\Delta) = \frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \mu(\Delta) \\ \mu_{12}(\Delta) &= \int_{\Delta} e_n(x) d\mu(x) \\ \mu_{21}(\Delta) &= \int_{\Delta} e_{-n}(x) d\mu(x)\end{aligned}$$

Como

$$\frac{d\mu_{12}}{d\mu} = e_n \quad \frac{d\mu}{dx} = W$$

tenemos que

$$\frac{d\mu_{12}}{dx} = e_n W.$$

Sea $\varphi = e_n \varphi_1 + \varphi_2$ donde $\varphi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{K})$ y $\varphi_2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{K})$ tal que

$$\|H\varphi\|_{\mu} \leq M \|\varphi\|_{\mu}.$$

Por el teorema anterior existe una medida $\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})_+$ tal que

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \langle \varphi_{\alpha}, \varphi_{\beta} \rangle_{\mu_{\alpha\beta}} + \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\nu} + \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle_{\nu^*} \geq 0$$

para $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$.

Tomando $\zeta, \xi \in \mathcal{K}$ y sea $\Delta \subset \mathbb{T}$ un conjunto Borel. Por el Lema 3.3

$$(3.4) \quad |\langle \mu_{12}(\Delta) \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} - \langle \nu(\Delta) \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}|^2 \leq \langle \mu_{11}(\Delta) \zeta, \zeta \rangle_{\mathcal{K}} \langle \mu_{22}(\Delta) \xi, \xi \rangle_{\mathcal{K}}$$

Sea $m(\Delta)$ la medida de Lebesgue de Δ , entonces,

$$(3.5) \quad \left| \frac{\langle \mu_{12}(\Delta) \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} - \langle \nu(\Delta) \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}}{m(\Delta)} \right|^2 \leq \frac{\langle \mu_{11}(\Delta) \zeta, \zeta \rangle_{\mathcal{K}}}{m(\Delta)} \frac{\langle \mu_{22}(\Delta) \xi, \xi \rangle_{\mathcal{K}}}{m(\Delta)}.$$

Por otro lado puesto que $\nu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})_+$ para cada $\zeta, \xi \in \mathcal{K}$ existe $h_{\zeta\xi} \in H^1(\mathbb{T})$ tal que

$$d\nu_{\zeta\xi}(x) = h_{\zeta\xi}(x) dx.$$

De donde,

$$\begin{aligned}
|\langle \mu_{12}(\Delta)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} - \langle \nu(\Delta)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}|^2 &= \left| \int_{\Delta} \langle d\mu_{12}(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} - \int_{\Delta} \langle d\nu(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} \right|^2 \\
&= \left| \int_{\Delta} \langle e_n d\mu\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} - \int_{\Delta} \langle h_{\zeta\xi}(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} dx \right|^2 \\
&= \left| \int_{\Delta} (\langle e_n W(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}} - \langle h_{\zeta\xi}(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{K}}) dx \right|^2 \\
&= \left| \int_{\Delta} \langle e_n W(x)\zeta - h_{\zeta\xi}(x), \xi \rangle_{\mathcal{K}} \right|^2 \\
&= \left| \int_{\Delta} (e_n W_{\zeta\xi} - h_{\zeta\xi})(x) dx \right|^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle \mu_{11}(\Delta)\zeta, \zeta \rangle_{\mathcal{K}} \langle \mu_{22}(\Delta)\xi, \xi \rangle_{\mathcal{K}} &= \int_{\Delta} \langle d\mu_{11}(x)\zeta, \zeta \rangle_{\mathcal{K}} \int_{\Delta} \langle d\mu_{22}(x)\xi, \xi \rangle_{\mathcal{K}} \\
&= \int_{\Delta} \left\langle \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \right) W(x)\zeta, \zeta \right\rangle_{\mathcal{K}} dx \int_{\Delta} \left\langle \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \right) W(x)\xi, \xi \right\rangle_{\mathcal{K}} dx \\
&= \left(\int_{\Delta} \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \right) W_{\zeta\zeta}(x) dx \right) \left(\int_{\Delta} \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \right) W_{\xi\xi}(x) dx \right) \\
&= \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \right)^2 \left(\int_{\Delta} W_{\zeta\zeta}(x) dx \right) \left(\int_{\Delta} W_{\xi\xi}(x) dx \right)
\end{aligned}$$

Usando estas igualdades y la desigualdad (3.5), obtenemos

$$\left| \frac{1}{m(\Delta)} \int_{\Delta} (e_n W_{\zeta\xi} - h_{\zeta\xi})(x) dx \right|^2 \leq \left(\frac{M^2 - 1}{M^2 + 1} \right)^2 \left(\frac{1}{m(\Delta)} \int_{\Delta} W_{\zeta\zeta}(x) dx \right) \left(\frac{1}{m(\Delta)} \int_{\Delta} W_{\xi\xi}(x) dx \right)$$

Tomando límite cuando $m(\Delta) \rightarrow 0$ y usando el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue, obtenemos

$$(M^2 + 1)^2 |e_n W_{\zeta\xi}(x) - h_{\zeta\xi}(x)|^2 \leq (M^2 - 1)^2 W_{\zeta\zeta}(x) W_{\xi\xi}(x)$$

para casi todo $x \in \mathbb{T}$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Por hipótesis tenemos que

$$(M^2 + 1) |e_n W_{\zeta\xi}(x) - h_{\zeta\xi}(x)| \leq (M^2 - 1) (W_{\zeta\zeta}(x))^{1/2} (W_{\xi\xi}(x))^{1/2}$$

para casi todo $x \in \mathbb{T}$.

Sea $\Delta \subset \mathbb{T}$ un conjunto Borel, usando la desigualdad anterior y la de Cauchy - Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned} (M^2 + 1) \int_{\Delta} |e_n W_{\zeta\xi}(x) - h_{\zeta\xi}(x)| dx &\leq (M^2 - 1) \int_{\Delta} (W_{\zeta\zeta}(x))^{1/2} (W_{\xi\xi}(x))^{1/2} dx \\ &\leq (M^2 - 1) \left(\int_{\Delta} W_{\zeta\zeta}(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Delta} W_{\xi\xi}(x) dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Para completar la demostración, notemos que en el resto de los pasos de la demostración de (b) $\Rightarrow$ (c) tenemos condiciones equivalentes. $\square$

Bibliografía

- [1] N. Akhiezer, I. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space*. Transl. from the Russian (Two volumes bound as one). Repr. of the 1961 and 1963 transl. New York, NY: Dover Publications. xiv, 147, iv, 1993.
- [2] R. Arocena, M. Cotlar. *Dilation of generalized Toeplitz kernels and some vectorial moment and weighted problems*. Lecture Notes in Math. Springer **908**, (1982), 169 - 188. Citado en página(s) 33, 35
- [3] J. Bogner. *Indefinite inner product spaces*. Springer Verlag. 1974.
- [4] R. Bruzual and M. Domínguez. *Dilatación, Extensión y Representación de Formas Definidas Positivas*. Publicaciones del Postgrado en Matemática de la Facultad de Ciencias de la UCV, 30 Aniversario. 2006.
- [5] R. Bruzual and M. Domínguez. *Operator-valued extension of the theorem of Helson and Szegő*. Operator Theory: Advances and Applications, **149**, (2004), 139-152. Citado en página(s) 2, 19, 29, 33
- [6] M. Cotlar, R. Bruzual, P. Alegría, M. Domínguez, J. Giménez y S. Marcantognini. *Extensión y Representación de Formas Invariantes en la Teoría de Interpolación, Predicción y Dilatación. Tercera Escuela Venezolana de Matemáticas*. 1990.
- [7] M. Cotlar, C. Sadosky. *On the Helson-Szegő theorem and a related class of modified Toeplitz kernels*. Proc. Symp. Pure Math. AMS., **35-I**, (1979), 383-407.
- [8] R. Douglas. *Banach algebra techniques in operator theory*. Academic press. 1972.
- [9] H. Dym, H. P. Mc Kean. *Fourier series and integrals*. Academic Press. 1972.
- [10] H. Helson, G. Szegő. *A problem in prediction theory*. Ann. Math. Pura Appl. **51**, (1960), 107-138. 2
- [11] I. A. Ibragimov, Yu. Rozanov. *Gaussian random procesess*. Applications of Mathematics, Vol. 9, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [12] I.S. Iohvidov, M.G. Krein, H. Langer. *Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric*. Mathematical Research, Vol. 9. Berlin: Akademie-Verlag, 1982.
- [13] W. Rudin. *Fourier analysis on groups*. Interscience. 1962.
- [14] B. Sz.-Nagy, C. Foias. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North Holland Publishing Co. 1970.