UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

PROBLEMAS DE INTERPOLACIÓN EN ESPACIOS DE SOBOLEV

Autor: Lic. Maicol Ochoa
Tutor: Dra. Marisela Domínguez.

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Magister Scientiarium, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela
Diciembre de 2010

Resumen

En el presente trabajo se considera el espacio de Sobolev de las funciones analíticas definidas en el disco unitario tales que ellas y sus derivadas son de cuadrado integrable.

Se presenta una demostración alternativa a un resultado de Agler, que aparece en el artículo *Nevanlinna-Pick interpolation on Sobolev space.* Proc. Am. Math. Soc. 108, No.2, (1990) 341-351. Para simplificar la lectura, se presenta previamente una versión de Arocena del teorema de levantamiento del conmutante de Sz.-Nagy y Foias.

Los principales aportes de este trabajo son:

(a) Dar una nueva demostración del resultado de Agler, que es análogo al teorema de Pick, pero relativo al espacio de Sobolev mencionado antes.

(b) En el mismo espacio de Sobolev, establecer un resultado similar al teorema de Carathéodory-Féjer.

Agradecimiento

Gracias al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela por su colaboración en la edición de este trabajo.

Índice general

Introducción

En el sentido clásico más simple interpolación es la reconstrucción constructiva (posiblemente aproximada) de una función de cierta clase a partir de sus propios valores, o a partir de valores conocidos de sus derivadas, en puntos dados.

Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ puntos fijos en el disco unitario $\mathbb{D}$. El conjunto de los puntos $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ en $\mathbb{C}^n$, tales que existe una función $f \in H^\infty$ tal que

$$|f| \leq 1 \qquad \text{y} \qquad f(z_j) = w_j \quad \text{para } 1 \leq j \leq n$$

fue descrito independientemente por Nevanlinna [**19**] y por Pick [**21**].

Para resolver este problema de interpolación Nevanlinna y Pick usaron técnicas completamente diferentes y encontraron condiciones de interpolación completamente diferentes (estas observaciones se pueden ver en [**25**]). En este trabajo estamos interesados en la condición de Pick: la matriz de tamaño $n \times n$ dada por

$$\left\{ \frac{1 - \overline{w}_j w_k}{1 - \overline{z}_j z_k} \right\}_{j,k=1,\ldots,n}$$

es definida positiva.

Desde que apareció el artículo de Sarason [**25**] la influencia del problema de interpolación de Nevanlinna-Pick ha sido extraordinaria en teoría de operadores. En los últimos capítulos de este trabajo se usarán técnicas de teoría de operadores en las demostraciones.

Agler [**2**] dio una versión del resultado de Pick sustituyendo los espacios de Hardy por el espacio de Sobolev, $\mathcal{H}$, de las funciones absolutamente continuas en $[0, 1]$ con derivadas de cuadrado integrable.

Más precisamente sea

$$\mathcal{H} = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ tales que } f \text{ es absolutamente continua y } f, f' \in L^2(0,1)\}.$$

Resulta que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$[f,g] = \int_0^1 f\,\overline{g} + \int_0^1 f\,'\,\overline{g\,'}$$

y $\|f\|_2 = [f,f]^{1/2}$.

El resultado de Agler establece lo siguiente: Sean $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$. Existe $f \in \mathcal{H}$ con

$$\|f\|_{[\infty]} \leq 1 \qquad \text{y} \qquad f(t_j) = w_j \quad \text{para } j = 1, \ldots, n$$

si y sólo si la matriz de tamaño $n \times n$ dada por

$$\{(1 - w_i \overline{w}_j) K(t_j, t_i)\}_{j,i=1,\ldots,n}$$

es definida positiva, donde K es la función núcleo reproductor del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (para más detalles acerca de núcleos reproductores ver [**4**]).

La demostración dada en [**2**] se basa en la desigualdad de Cauchy, condiciones para que ciertos conjuntos tengan un mínimo y la compacidad débil* de la bola unitaria cerrada de un espacio dual.

En este trabajo se presenta una demostración diferente para el resultado de Agler. En esta prueba se usan algunos resultados de la teoría de operadores, como por ejemplo, una versión dada por Arocena del teorema de levantamiento del conmutante de Sz.-Nagy y Foias.

Por último, se establece un análogo al teorema de Carathéodory-Féjer, pero relativo al espacio de Sobolev $\mathcal{H}$. La demostración que se presenta es constructiva y se fundamenta en técnicas de la teoría de operadores, similares a las utilizadas en la demostración alternativa del resultado de Agler.

Capítulo 1

El teorema de Pick

Como es usual sean

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

$$\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\},$$

$$\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Se considerará el espacio

$$\mathcal{B} = \{f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}} \,|\, f \text{ es analítica}\}.$$

Un *producto de Blaschke finito* es una función de la forma:

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - z_j}{1 - z\overline{z}_j} \quad \text{con } z_j \in \mathbb{D}$$

Es sabido que si B es un producto de Blaschke, entonces:

(a) B es continua en $\partial\mathbb{D}$.

(b) $|B| = 1$ en $\partial\mathbb{D}$.

(c) B tiene a lo sumo una cantidad finita de ceros en $\mathbb{D}$. A esta cantidad de ceros se le suele llamar *grado* de B. Si B tiene grado cero, entonces B es una función constante de módulo uno.

Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ puntos fijos en el disco unitario $\mathbb{D}$. El conjunto de los puntos $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ en $\mathbb{C}^n$, tales que existe una función $f \in H^\infty$ tal que $|f| \leq 1$ y $\phi(z_j) = w_j$, para $1 \leq j \leq n$ fue descrito independientemente por Nevanlinna [**19**] y por Pick [**21**].

La relación entre formas cuadráticas no negativas y el problema de interpolación mencionado antes se evidencia en el siguiente teorema de Pick [**21**] (ver también Teorema 2.2 de [**16**]).

Teorema 1.1. [**21**] *Sea* $\{z_1, \ldots, z_n\}$ *un conjunto de puntos no nulos de* $\mathbb{D}$ *y* $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$. *Existe* $f \in \mathcal{B}$ *tal que* $f(z_j) = w_j$ *si y sólo si la forma cuadrática*

$$Q_n(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{1 - w_j \overline{w}_k}{1 - z_j \overline{z}_k} t_j \bar{t}_k$$

es no negativa. En tal caso, f *es un producto de Blaschke de grado a lo sumo* n.

Demostración.

Se usará inducción en n.

Si $n = 1$ los conjuntos en consideración son $\{z_1\}$ y $\{w_1\}$. Basta tomar $f \equiv w_1$ pues resulta claro que $f(z_1) = w_1$. Además

$$\frac{1 - |w_1|^2}{1 - |z_1|^2} \geq 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad 1 - |w_1|^2 \geq 0.$$

Por lo tanto se cumple el teorema para $n = 1$.

Sea $n > 1$, supóngase que se cumple el teorema para cualquier conjunto $\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ de puntos en $\mathbb{D}$.

Si existe $f \in \mathcal{B}$ tal que

$$f(z_j) = w_j \qquad \text{para } j = 1, \ldots, n-1$$

y algunos $w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{C}$, y si además $z_j \neq 0$ para $j = 1, \ldots, n-1$, entonces la función

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}, \quad z \neq 0,$$

está en $\mathcal{B}$ y se cumple que

$$g(z_j) = \frac{w_j}{z_j}, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Más aún, es claro que f es un producto de Blaschke finito si y sólo si g lo es.

Ahora bien, para los conjuntos $\{z_1, \ldots, z_n\}$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ se consideran las trasnformaciones

$$z'_j = \frac{z_j - z_n}{1 - \overline{z}_n z_j}, \qquad w'_j = \frac{w_j - w_n}{1 - \overline{w}_n w_j}$$

para $j = 1, \ldots, n$ con lo que se reduce el problema a los conjuntos $\{z'_1, \ldots, z'_{n-1}, 0\}$ y $\{w'_1, \ldots, w'_{n-1}, 0\}$.

Se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Existe $f \in \mathcal{B}$ tal que $f(z_j) = w_j$ para $j = 1, \dots, n$.

(b) Existe $f \in \mathcal{B}$ tal que $f(0) = 0$ y $f(z'_j) = w'_j$ para $j = 1, \dots, n-1$.

(c) La función g dada por

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}, \quad z \neq 0$$

está en $\mathcal{B}$ y $g(z'_j) = \frac{w'_j}{z'_j}$ para $j = 1, \dots, n-1$.

(d) La forma cuadrática $\widetilde{Q'}_{n-1}$ asociada a g es no negativa.

Sean

$$\alpha_j \overline{\alpha}_k = \frac{1 - z'_j \overline{z'}_k}{1 - z_j \overline{z}_k} = \frac{1 - |z_n|^2}{(1 - z_j \overline{z}_n)(1 - z_n \overline{z}_k)}$$

y

$$\beta_j \overline{\beta}_k = \frac{1 - w'_j \overline{w'}_k}{1 - w_j \overline{w}_k} = \frac{1 - |w_n|^2}{(1 - w_j \overline{w}_n)(1 - w_n \overline{w}_k)}.$$

Luego,

$$\frac{1 - w'_j \overline{w'}_k}{1 - z'_j \overline{z'}_k} t_j \bar{t}_k = \frac{1 - w_j \overline{w}_k}{1 - z_j \overline{z}_k} \left(\frac{\beta_j}{\alpha_j} t_j \right) \overline{\left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} t_k \right)}$$

y así

$$Q'_n(t_1, \dots, t_n) = Q_n \left(\frac{\beta_1 t_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta_n t_n}{\alpha_n} \right).$$

De esto se deduce que $Q_n{}' \geq 0$ si y sólo si $Q_n \geq 0$.

Sea $\widetilde{Q}_{n-1}$ la forma asociada a la función g antes mencionada, bajo la hipótesis

$$z_n = w_n = 0.$$

Basta demostrar que $Q_n \geq 0$ si y sólo si $\widetilde{Q}_{n-1} \geq 0$.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_n(t_1, \dots, t_n) &= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{1 - w_j \overline{w}_k}{1 - z_j \overline{z}_k} t_j \bar{t}_k \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - w_j \overline{w}_k}{1 - z_j \overline{z}_k} t_j \bar{t}_k \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - w_j \overline{w}_k}{1 - z_j \overline{z}_k} t_j \bar{t}_k + t_j \bar{t}_n \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - w_j \overline{w}_k}{1 - z_j \overline{z}_k} t_j \bar{t}_k + t_j \bar{t}_n \right) + \sum_{k=1}^{n-1} t_n \bar{t}_k + |t_n|^2
\end{aligned}$$

Completando cuadrados en t_n se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
Q_n(t_1,\ldots,t_n) &= \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{1-w_j\overline{w}_k}{1-z_j\overline{z}_k} t_j\bar{t}_k + \sum_{k=1}^{n-1} t_n\bar{t}_k + \sum_{j=1}^{n-1} t_j\bar{t}_n + |t_n|^2 \\
&= \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{1-w_j\overline{w}_k}{1-z_j\overline{z}_k} t_j\bar{t}_k + 2Re\sum_{j=1}^{n-1} t_n\bar{t}_j + |t_n|^2 \\
&= \sum_{j,k=1}^{n-1} \left(\frac{1-w_j\overline{w}_k}{1-z_j\overline{z}_k} - 1\right) t_j\bar{t}_k + \left| t_n + \sum_{j=1}^{n-1} t_j \right|^2 .
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{1-w_j\overline{w}_k}{1-z_j\overline{z}_k} - 1 &= \frac{1-w_j\overline{w}_k - (1-z_j\overline{z}_k)}{1-z_j\overline{z}_k} \\
&= \frac{z_j\overline{z}_k - w_j\overline{w}_k}{1-z_j\overline{z}_k} \\
&= \frac{1-\left(\frac{w_j}{z_j}\right)\overline{\left(\frac{w_k}{z_k}\right)}}{1-z_j\overline{z}_k} z_j\overline{z}_k
\end{aligned}$$

entonces

$$Q_n(t_1,\ldots,t_n) = \left|\sum_{j=1}^{n} t_j\right|^2 + \widetilde{Q}_{n-1}(z_1t_1,\ldots,z_{n-1}t_{n-1})$$

y de esto se deduce que $\widetilde{Q}_{n-1} \geq 0$ implica $Q_n \geq 0$.

Si se toma $t_n = -\sum_{j=1}^{n-1} t_j$ se tiene la implicación contraria. □

Capítulo 2

Núcleos reproductivos

Dado un conjunto Ω cualquiera, sea

$$\mathcal{F}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ es función}\}$$

y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{F}}$ un producto interno que hace de $\mathcal{F}(\Omega)$ un espacio de Hilbert.

Definición 2.1. Una función $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ es un *núcleo reproductor* para $\mathcal{F}(\Omega)$ si

(a) Fijado $x_0 \in \Omega$, la función $K(\cdot, x_0) : \Omega \to \mathbb{C}$ está en $\mathcal{F}(\Omega)$.

(b) K tiene la *propiedad reproductiva*:

$$f(x) = \langle f(\cdot), K(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{F}}$$

para todo $f \in \mathcal{F}(\Omega)$, para todo $x \in \Omega$.

Nótese que si K es un núcleo reproductor para $\mathcal{F}(\Omega)$, entonces se cumple que

$$\|K(\cdot, x)\|_{\mathcal{F}}^2 = \langle K(\cdot, x), K(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{F}} = K(x, x)$$

para $x \in \Omega$.

Proposición 2.2. *Si en el espacio $\mathcal{F}(\Omega)$ existe un núcleo reproductor, entonces es único.*

Demostración. Supóngase que K_1 y K_2 son núcleos reproductores para $\mathcal{F}(\Omega)$.

Si $x \in \Omega$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|K_1(\cdot, x) - K_2(\cdot, x)\|_{\mathcal{F}} &= \langle K_1(\cdot, x) - K_2(\cdot, x), K_1(\cdot, x) - K_2(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{F}} \\
&= \langle K_1(\cdot, x), K_1(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{F}} - \langle K_1(\cdot, x), K_2(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{F}} \\
&\quad - \langle K_2(\cdot, x), K_1(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{F}} + \langle K_2(\cdot, x), K_2(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{F}} \\
&= \|K_1(\cdot, x)\|_{\mathcal{F}}^2 - K_1(x, x) - K_2(x, x) + \|K_2(\cdot, x)\|_{\mathcal{F}}^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 2.3. *Si K es el núcleo reproductor para $\mathcal{F}(\Omega)$, entonces para $x \in \Omega$ la función $E_x : \mathcal{F}(\Omega) \to \mathbb{C}$ dada por*

$$E_x(f) = f(x)$$

es un funcional lineal y continuo.

Demostración.

(a) Si $x \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{F}(\Omega)$ entonces

$$E_x(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x) = \lambda E_x(f) + E_x(g).$$

(b) Sea $x \in \Omega$, entonces:

$$\begin{aligned} |E_x(f)| &= |f(x)| \\ &= |\langle f(\cdot), K(\cdot, x)\rangle_{\mathcal{F}}| \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{F}} \|K(\cdot, x)\|_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

de donde $\|E_x\| \leq \|K(\cdot, x)\|_{\mathcal{F}}$ □

La función E_x dada en la proposición anterior, se conoce como la *evaluación* en x.

Definición 2.4. Se dice que el espacio $\mathcal{F}(\Omega)$ es un *espacio funcional de Hilbert* si todas las funciones evaluaciones son funcionales continuos.

El siguiente resultado establece una relación entre los espacios funcionales de Hilbert y los espacios con núcleos reproductores.

Lema 2.5. *$\mathcal{F}(\Omega)$ es un espacio funcional de Hilbert si y sólo si $\mathcal{F}(\Omega)$ tiene un núcleo reproductor.*

Demostración.

(a) Dado $x \in \Omega$ sea $E_x : \mathcal{F}(\Omega) \to \mathbb{C}$ dado por $E_x(f) = f(x)$. Supóngase que E_x es continuo.

Por el teorema de representación de Riesz para espacios de Hilbert, se sabe que existe $k_x \in \mathcal{F}(\Omega)$ tal que

$$E_x(f) = \langle f, k_x \rangle_{\mathcal{F}}.$$

Sea $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ dado por

$$K(y,x) = k_x(y).$$

Para $x_0 \in \Omega$ fijo, la aplicación $y \mapsto K(y,x_0)$ está en $\mathcal{F}(\Omega)$. Además

$$f(x) = E_x(f) = \langle f, k_x\rangle_{\mathcal{F}} = \langle f, k(\cdot,x)\rangle_{\mathcal{F}}$$

con lo que queda probado que $\mathcal{F}(\Omega)$ tiene núcleo reproductor.

(b) La otra implicación se obtiene de la proposición anterior. □

Proposición 2.6. *Sea $\mathcal{F}(\Omega)$ un espacio funcional de Hilbert con núcleo reproductor. Entonces existe una familia de funciones $\{k_y\}_{y\in X}$ en $\mathcal{F}(\Omega)$ tales que*

(1) *Para todo $x, y \in \Omega$*

$$k_y(x) = \langle k_y, k_x\rangle_{\mathcal{F}}.$$

(2) *Sea $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ dado por*

$$K(x,y) = k_y(x).$$

Entonces K es el (único) núcleo reproductor para $\mathcal{F}(\Omega)$ y

$$K(x,y) = \langle k_y, k_x\rangle_{\mathcal{F}}.$$

El siguiente resultado será de utilidad en la solución de algunos problemas de interpolación.

Lema 2.7. *Sea $\mathcal{F}(\Omega)$ un espacio funcional de Hilbert con núcleo reproductor K. Para $y \in \Omega$ sea $k_y : \Omega \to \mathbb{C}$ dado por*

$$k_y(\cdot) = K(\cdot, y).$$

Entonces para cualquier conjunto de índices $\mathcal{J}$ y cualquier colección $\{s_j\}_{j\in\mathcal{J}} \subset \Omega$, la familia $\{k_{s_j}\}_{j\in\mathcal{J}}$ es linealmente independiente.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I} = \{j_1, \ldots, j_n\}$ cualquier subconjunto finito de $\mathcal{J}$ y $\{s_j\}_{j\in\mathcal{J}} \subset \Omega$.

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ números complejos tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_{s_{j_i}} = 0.$$

Sea $f_r : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que

$$f_r(s_{j_i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = r \\ 0 & \text{si } i \neq r \end{cases}$$

Luego

$$0 = \left\langle f_r, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_{s_{j_i}} \right\rangle_{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda}_i \langle f_r, k_{s_{j_i}} \rangle_{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda}_r f_r(s_{j_i}) = \overline{\lambda}_i$$

y así $\lambda_r = 0$ para $r = 1, \ldots, n$. $\square$

Otra propiedad interesante es la siguiente.

Lema 2.8. *Sea $\mathcal{F}(\Omega)$ un espacio funcional de Hilbert con núcleo reproductor K. Para $y \in \Omega$ sea $k_y : \Omega \to \mathbb{C}$ dado por $k_y(\cdot) = K(\cdot, y)$.*

Sean $\mathcal{J}$ un conjunto de índices cualquiera, y para $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I} = \{j_1, \ldots, j_n\} \subset \mathcal{J}$ un subconjunto finito. Sean $\{s_j\}_{j \in \mathcal{J}} \subset \Omega$ y

$$\mathcal{V} = \bigvee_{i=1}^{n} k_{s_{j_i}}(\cdot) = \bigvee_{i=1}^{n} \{\lambda_i K(\cdot, s_{j_i})\}_{\lambda_i \in \mathbb{C}}.$$

Dados $\{w_{j_i}\}_{j_i \in \mathcal{I}}$ números complejos, sea $X : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ definido por

$$XK(\cdot, s_{j_i}) = \overline{w}_{j_i} K(\cdot, s_{j_i}) \qquad \text{para } j_i \in \mathcal{I}.$$

Si $M : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ está dada por

$$M(i,j) = \langle K(\cdot, s_i), K(\cdot, s_j) \rangle_{\mathcal{F}} (1 - \overline{w}_i w_j) = K(s_j, s_i)(1 - \overline{w}_i w_j),$$

para $j, i \in \mathcal{I}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

(a) $\|X\| \leq 1$.

(b) *M es definida positiva.*

Demostración. De

$$K(s_j, s_i) = \langle k_{s_i}, k_{s_j} \rangle_{\mathcal{F}} = \langle K(\cdot, s_i), K(\cdot, s_j) \rangle_{\mathcal{F}}$$

se deduce que $M(i,j)$ tiene las dos expresiones del enunciado.

La acotación $\|X\| \leq 1$ ocurre si y sólo si

$$\left\| X \sum_{i=1}^{n} \lambda_i K(\cdot, s_i) \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i K(\cdot, s_i) \right\|^2$$

y esto equivale a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\overline{\lambda}_j\langle XK(\cdot,s_i),XK(\cdot,s_j)\rangle_{\mathcal{F}}\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\overline{\lambda}_j\langle K(\cdot,s_i),K(\cdot,s_j)\rangle_{\mathcal{F}}.$$

Por otra parte, se tiene que

$$\langle XK(\cdot,s_i),XK(\cdot,s_j)\rangle_{\mathcal{F}}=\overline{w}_iw_j\langle K(\cdot,s_i),K(\cdot,s_j)\rangle_{\mathcal{F}}$$

y por lo tanto, la desigualdad

$$\left\|X\sum_{i=1}^{n}\lambda_iK(\cdot,s_i)\right\|^2\leq\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_iK(\cdot,s_i)\right\|^2$$

es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\overline{\lambda}_j\langle K(\cdot,s_i),K(\cdot,s_j)\rangle_{\mathcal{F}}(1-\overline{w}_iw_j)\geq 0.$$

$\square$

En lo que sigue se considerarán los espacios de Lebesgue y los espacios de Hardy.

Para $n\in\mathbb{Z}$ sea $e_n:\mathbb{R}\to\mathbb{T}$ la función dada por

$$e_n(t)=e^{int}.$$

Para $1\leq p\leq\infty$ se define el espacio

$$H^p=\left\{f\in L^p(\mathbb{T})\ :\ \int_0^{2\pi}f(e^{it})e_n(t)dt=0\quad\text{para}\quad n<0\right\}.$$

Es claro que H^p es un subespacio cerrado del espacio L^p correspondiente, luego H^p es un espacio de Banach.

En particular, se cumple que H^2 es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor.

Lema 2.9. *Para $u\in\mathbb{D}$ sea*

$$\Psi_u(z)=\frac{1}{1-\overline{u}z}.$$

Entonces Ψ_u es el núcleo reproductor del espacio H^2.

Demostración. Sean $u\in\mathbb{D}$ y $f\in H^2$, entonces se cumple que:

$$
\begin{aligned}
\langle f, \Psi_u \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{1 - ue^{-it}}\, dt \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it}) ie^{it}}{(1 - ue^{-it})e^{it}}\, dt \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{(1 - u\overline{z})z}\, dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z - u}\, dz \\
&= f(u)
\end{aligned}
$$

Lo que prueba que Ψ_u es la función núcleo reproductor del espacio de Hilbert H^2. $\square$

Una propiedad importante de $L^\infty(\mathbb{T})$ es que, si $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $f \in L^2(\mathbb{T})$ entonces $\phi f \in L^2(\mathbb{T})$ y

$$\|\phi f\|_2^2 \leq \|\phi\|_\infty^2 \|f\|_2^2.$$

Esto permite definir el operador de multiplicación por funciones en $L^\infty(\mathbb{T})$.

Para $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ sea $M_\phi : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ el *operador multiplicación por* ϕ, es decir,

$$M_\phi f = \phi f$$

con $f \in L^2(\mathbb{T})$. Se puede probar que M_ϕ es un operador lineal acotado y $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$. Una demostración detallada de este hecho puede verse en [**22**].

La aplicación $\phi \to M_\phi$ permite representar de manera inyectiva a $L^\infty(\mathbb{T})$ en el espacio $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$.

Sea $S : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ el *operador de traslación (shift)*, es decir

$$(Sf)(z) = zf(z)$$

para $f \in L^2(\mathbb{T})$.

El siguiente teorema es un resultado clásico y será de utilidad más adelante.

Teorema 2.10 (Beurling)**.** *Sea $X \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$. Entonces $XS = SX$ si y sólo si existe una función $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ tal que $X = M_g$. Además $\|g\|_\infty = \|X\|$.*

Una demostración detallada puede encontrarse en [**14**] o en [**20**].

Definición 2.11. Sean $\mathbb{B}$ un espacio de Banach y $A \in \mathcal{L}(\mathbb{B})$ un operador lineal. El conmutante de A es el conjunto

$$[A] = \{X : \mathcal{L}(\mathbb{B}) \to \mathcal{L}(\mathbb{B}) \mid XA = AX\}.$$

Con el teorema de Beurling es posible caracterizar de manera precisa al conmutante del operador shift en $L^2(\mathbb{T})$.

Note que $X \in [S]$ si y sólo si existe $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ tal que $X = M_g$.

Por tanto, se tiene que

$$[S] \simeq \{M_g : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) \mid g \in L^\infty(\mathbb{T})\}$$

donde el símbolo $\simeq$ indica un isomorfismo.

Además, como se cumple que

$$\|X\| = \|M_g\| = \|g\|_\infty,$$

se concluye que $[S] \simeq L^\infty(\mathbb{T})$.

Capítulo 3

El teorema de levantamiento del conmutante y aplicaciones

Los siguientes resultados son clásicos en la teoría de operadores. El primero de ellos garantiza la extensión unitaria de un operador isométrico definido en un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert, y el segundo trata sobre la representación de un operador de contracción en un espacio de Hilbert en términos de ciertas isometrías.

Lema 3.1. *Sean $\mathcal{D}, \mathcal{R}$ subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $V : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ un operador isométrico, entonces V puede ser extendido a un operador unitario U en un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado.*

Lema 3.2. *Si $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ son espacios de Hilbert y $T \in L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ es una contracción, entonces existen un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y dos isometrías $v_j \in L(\mathcal{E}_j, \mathcal{H})$ para $j = 1, 2$, tales que $\mathcal{H} = v_1\mathcal{E}_1 \bigvee v_2\mathcal{E}_2 \quad y \quad T = v_2^* v_1$.*

La demostración de estos lemas puede verse en [**3**].

Ahora se presenta una versión dada por Arocena del teorema de levantamiento del conmutante de Sz.-Nagy y Foias. Este teorema será usado posteriormente para resolver algunos problemas clásicos de interpolación. La demostración que se presenta a continuación es una versión detallada de la dada en [**3**].

Teorema 3.3. [**3**] *Para $j = 1, 2$ sean F_j espacios de Hilbert, $U_j \in L(F_j)$ operadores unitarios, $E_j \subset F_j$ subespacios cerrados tales que $U_1E_1 \subset E_1$, $U_2^{-1}E_2 \subset E_2$,*

$$F_1 = \bigvee_{n\leq 0} U_1^n E_1 \quad y \quad F_2 = \bigvee_{n\geq 0} U_2^n E_2.$$

Si $T \in L(E_1, E_2)$ verifica $TU_1|_{E_1} = P_{E_2}U_2T$ entonces existe $\widetilde{T} \in L(F_1, F_2)$ tal que $\widetilde{T}U_1 = U_2\widetilde{T}$, $T = P_{E_2}\widetilde{T}|_{E_1}$ y $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Demostración. Si $T = 0$ la solución trivial es $\widetilde{T} = 0$ y vale el teorema.

Si T es un operador no nulo, entonces se puede suponer que $\|T\| = 1$, pues en caso contrario se considera el operador $B = \frac{T}{\|T\|}$.

En virtud del Lema 3.2 existen dos isometrías v_1, v_2 y un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tales que

$$\mathcal{H} = v_1 E_1 \bigvee v_2 E_2 \quad \text{y} \quad T = v_2^* v_1.$$

Sean

$$D = v_1 E_1 \bigvee v_2 U_2^{-1} E_2 \quad \text{y} \quad R = v_1 U_1 E_1 \bigvee v_2 E_2.$$

Considere la aplicación $V : D \to R$ dada por

$$V(v_1\varphi_1 + v_2 U_2^{-1}\varphi_2) = v_1 U_1 \varphi_1 + v_2 \varphi_2$$

para $\varphi_1 \in E_1$ y $\varphi_2 1 \in E_2$.

Luego

$$\|v_1 U_1 \varphi_1 + v_2\varphi_2\|^2 = \|v_1 U_1 \varphi_1\|^2 + 2\Re\langle v_1 U_1 \varphi_1, v_2 \varphi_2\rangle + \|v_2\varphi_2\|^2.$$

Pero, como v_1, v_2 son isometrías y U_1, U_2 son operadores unitarios, entonces

$$\|v_1 U_1 \varphi_1\|^2 = \|U_1\varphi_1\|^2 = \|\varphi_1\|^2 = \|v_1\varphi_1\|^2$$

y

$$\|v_2\varphi_2\|^2 = \|\varphi_2\|^2 = \|U_2^{-1}\varphi_2\|^2 = \|v_2 U_2^{-1}\varphi_2\|^2.$$

Además

$$\begin{aligned}
\langle v_1 U_1 \varphi_1, v_2\varphi_2\rangle &= \langle v_2^* v_1 U_1 \varphi_1, \varphi_2\rangle \\
&= \langle T U_1 \varphi_1, \varphi_2\rangle \\
&= \langle P_{E_2} U_2 T \varphi_1, \varphi_2\rangle \\
&= \langle T\varphi_1, U_2^{-1}\varphi_2\rangle \\
&= \langle v_2^* v_1 \varphi_1, U_2^{-1}\varphi_2\rangle \\
&= \langle v_1\varphi_1, v_2 U_2^{-1}\varphi_2\rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|v_1 U_1 \varphi_1 + v_2\varphi_2\|^2 = \|v_1\varphi_1 + v_2 U_2^{-1}\varphi_2\|^2,$$

es decir, el operador V es isométrico.

Por el Lema 3.1 la isometría V se extiende a un operador unitario U definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado.

Sea $\widetilde{v_1} \in L(F_1, \mathcal{F})$ la extensión isométrica de v_1 que viene dada por

$$\widetilde{v_1}(U_1^n \varphi_1) = U^n v_1 \varphi_1, \quad \text{con} \quad \varphi_1 \in E_1, n \in \mathbb{Z}.$$

Para $k \in \mathbb{N}$ sean $\{n_j\}_{j=1}^k \subset \mathbb{Z}$ y $\{\varphi_j\}_{j=1}^k \subset E_1$. Si un entero α es tal que $\alpha + n_j \geq 1$ para $j = 1, \ldots, k$ entonces se tiene que

$$\|U_1^{n_1}\varphi_1 + \cdots + U_1^{n_k}\varphi_k\|_{F_1} = \|U_1^{\alpha+n_1}\varphi_1 + \cdots + U_1^{\alpha+n_k}\varphi_k\|_{E_1},$$

ya que $U_1^r E_1 \subset E_1$ para todo entero $r \geq 1$ y $V v_1 \varphi_1 = v_1 U_1 \varphi_1$.

Luego, para $r \geq 0$

$$V^{r+1} v_1 \varphi_1 = V(V^r v_1 \varphi_1) = V(v_1 U_1^r \varphi_1) = v_1 U_1^{r+1} \varphi_1.$$

Mas aún, para $r \geq 0$ se cumple que

$$V^r v_1 \varphi_1 = U^r v_1 \varphi_1.$$

En efecto, si $r = 0$ la afirmación es cierta. Si la afirmación es cierta para $r \geq 0$ entonces

$$U^{r+1} v_1 \varphi_1 = U^r V v_1 \varphi_1 = U^r v_1 U_1 \varphi_1 = V^r v_1 U_1 \varphi_1 = V^{r+1} v_1 \varphi_1.$$

Por lo tanto la afirmación es cierta para $r + 1$.

Luego, como U es una extensión unitaria de V se tendrá

$$\begin{aligned}
\|U_1^{\alpha+n_1}\varphi_1 + \cdots + U_1^{\alpha+n_k}\varphi_k\|_{E_1} &= \|v_1(U_1^{\alpha+n_1}\varphi_1 + \cdots + U_1^{\alpha+n_k}\varphi_k)\| \\
&= \|V^{\alpha+n_1} v_1 \varphi_1 + \cdots + V^{\alpha+n_k} v_1 \varphi_k\|_{\mathcal{H}} \\
&= \|U_1^{\alpha+n_1} v_1 \varphi_1 + \cdots + U_1^{\alpha+n_k} v_1 \varphi_k\|_{\mathcal{F}}
\end{aligned}$$

De forma análoga el operador $\widetilde{v_2} \in L(F_2, \mathcal{F})$ dado por

$$\widetilde{v_2}(U_2^n \varphi_2) \quad \text{para} \quad \varphi_2 \in E_2, n \in \mathbb{Z}$$

es una extensión isométrica de v_2.

Sea

$$\widetilde{T} = \widetilde{v_2}^* \widetilde{v_1}.$$

Entonces

$$\langle T\varphi_1, \varphi_2\rangle = \langle v_1\varphi_1, v_2\varphi_2\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \widetilde{v_1}\varphi_1, \widetilde{v_2}\varphi_2\rangle = \langle P_{E_2}\widetilde{T}\varphi_1, \varphi_2\rangle.$$

De donde

$$T = P_{E_2}\widetilde{T}|_{E_1}.$$

Además, $\|\widetilde{T}\| = 1$ ya que

$$1 = \|T\| = \|P_{E_2}\widetilde{T}|_{E_1}\| \leq \|\widetilde{T}\| = \|\widetilde{v_2}^*\widetilde{v_1}\| \leq 1.$$

Finalmente se observa que para enteros $n \leq 0$ y $k \geq 0$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{T}U_1U_1^n\varphi_1, U_2^k\varphi_2\rangle &= \langle \widetilde{v_1}U_1^{n+1}\varphi_1, \widetilde{v_2}U_2^k\varphi_2\rangle \\
&= \langle U^{n+1}v_1\varphi_1, U^k v_2\varphi_2\rangle \\
&= \langle U^n v_1\varphi_1, U^{k-1}v_2\varphi_2\rangle \\
&= \langle \widetilde{v_1}U_1^n\varphi_1, \widetilde{v_2}U_2^{k-1}\varphi_2\rangle \\
&= \langle U_2\widetilde{T}U_1^n\varphi_1, U_2^k\varphi_2\rangle
\end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$\widetilde{T}U_1 = U_2\widetilde{T}.$$

□

Ahora se muestra cómo usar el Teorema 3.3 para dar una solución alternativa al problema de Pick.

Teorema 3.4 (Pick)**.** *Sean $\mathcal{J}$ un conjunto finito de índices , $\{z_j : j \in \mathcal{J}\}$ un conjunto de puntos distintos en $\mathbb{D}$ y $\{w_j : j \in \mathcal{J}\} \subset \mathbb{C}$. Sean*

$$\mathcal{H} = \{h \in H^\infty : h(z_j) = w_j \textit{ para todo } j \in \mathcal{J} \textit{ y } \|h\|_\infty \leq 1\}$$

y $K : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$K(s,t) = \frac{1 - w_s\overline{w}_t}{1 - z_s\overline{z}_t}.$$

Entonces $\mathcal{H}$ es no vacío si y sólo si K es definido positivo.

Demostración.

Para $u \in \mathbb{D}$ sea Ψ_u el núcleo reproductor del espacio H^2. Sean $\mathcal{J}$ un conjunto finito de índices, $\{s_j : j \in \mathcal{J}\} \subset \mathbb{D}$ y $\{w_j : j \in \mathcal{J}\} \subset \mathbb{C}$.

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $j_1, \ldots, j_n \in \mathcal{J}$, por el Lema 2.7 la familia $\{\Psi_{z_{j_i}}\}_{i=1}^{n}$ es linealmente independiente. Sea

$$\mathcal{F} = \bigvee_{i=1}^{n} \Psi_{z_{j_i}} = \bigvee_{i=1}^{n} \{\lambda_i \Psi_{z_{j_i}}\}_{\lambda_i \in \mathbb{C}}.$$

Sea $X : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dado por

$$X\Psi_{z_{j_i}} = \overline{w}_{j_i} \Psi_{z_{j_i}} \text{ para todo } j_i \in \mathcal{J}.$$

En virtud del Lema 2.8, basta mostrar que:

$$\|X\| \leq 1 \text{ si y sólo si } \mathcal{H} \text{ es no vacío.}$$

($\Rightarrow$) Suponga que $\|X\| \leq 1$. Sean

$$U_1 = U_2 = S, \qquad E_1 = H^2, \qquad E_2 = F \oplus H^2_-$$

donde F es la clausura en H^2 de $\mathcal{F}$. Sea $A \in L(E_1, E_2)$ dada por

$$Af = X^* P_F f.$$

Entonces se verifica que

$$AU_1|_{E_1} = P_{E_2} U_2 A.$$

En efecto, para cualquier $n \geq 0$, $j \in \mathcal{J}$ y $u \in H^2_-$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle AU_1 e_n, \Psi_{z_j} \rangle &= \langle ASe_n, \Psi_{z_j} \rangle \\
&= \langle e_{n+1}, X\Psi_{z_j} \rangle \\
&= \langle e_{n+1}, \overline{w}_j \Psi_{z_j} \rangle \\
&= w_j \langle e_{n+1}, \Psi_{z_j} \rangle \\
&= w_j (z_j)^{n+1}
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} w_j(z_j)^{n+1} &= z_j w_j z_j^n \\ &= z_j w_j \langle e_n, \Psi_{z_j} \rangle \\ &= z_j \langle e_n, \overline{w}_j \Psi_{z_j} \rangle \\ &= z_j \langle e_n, X\Psi_{z_j} \rangle \\ &= z_j \langle X^* P_F e_n, \Psi_{z_j} \rangle. \end{aligned}$$

De la definición de A sigue que

$$\begin{aligned} z_j \langle X^* P_F e_n, \Psi_{z_j} \rangle &= z_j \langle A e_n, \Psi_{z_j} \rangle \\ &= z_j (A e_n)(z_j) \\ &= (U_2 A e_n)(z_j) \\ &= \langle U_2 A e_n, \Psi_{z_j} \rangle \\ &= \langle P_{E_2} U_2 A e_n, \Psi_{z_j} \rangle \end{aligned}$$

de donde

$$AU_1|_{E_1} = P_{E_2} U_2 A.$$

Por el Teorema 3.3 se puede asegurar que existe $\widetilde{A} \in L(L^2)$ que verifica $\widetilde{A}S = S\widetilde{A}$.

Además, el Teorema 2.10 garantiza la existencia de una función $g \in L^\infty$ tal que $\widetilde{A} = M_g$ y $\|g\|_\infty = \|\widetilde{A}\|$. Luego se tiene lo siguiente

$$\|g\|_\infty = \|\widetilde{A}\| = \|A\| = \|X^* P_F\| \leq \|X^*\| \leq 1.$$

Si $f \in F$ entonces se cumple que

$$X^* f = X^* P_F f = Af = P_{F \oplus H^2_-} \widetilde{A} f = P_{F \oplus H^2_-} M_g f = P_{F \oplus H^2_-} (g \cdot f)$$

A continuación se probará que $g \in H^\infty$. Como $H^2 \cap L^\infty \subset H^\infty$, basta probar que $g \in H^2$.

Si $n < 0$ entonces

$$\langle g, e_n \rangle = \langle \widetilde{A} e_0, e_n \rangle = \langle P_{E_2} \widetilde{A}|_{E_2} e_0, e_n \rangle = \langle A e_0, e_n \rangle = 0,$$

puesto que $\mathrm{Ran}(A) \subset F \subset H^2_+$. Por tanto se tiene que $g \in H^\infty$.

Por otro lado, si $j \in \mathcal{J}$ se tendrá lo siguiente:

$$\begin{aligned} g(z_j) &= \langle g, \Psi_{z_j} \rangle \\ &= \langle \widetilde{A} e_0, \Psi_{z_j} \rangle \\ &= \langle P_{E_2} \widetilde{A} e_0, \Psi_{z_j} \rangle \\ &= \langle A e_0, \Psi_{z_j} \rangle \\ &= \langle X^* P_F e_0, \Psi_{z_j} \rangle \\ &= \langle P_F e_0, X \Psi_{z_j} \rangle \\ &= \langle e_0, \overline{w}_j \Psi_{z_j} \rangle \\ &= w_j \langle e_0, \Psi_{z_j} \rangle \\ &= w_j e_0(z_j) \\ &= w_j \end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathcal{H}$ es no vacío.

($\Leftarrow$) Si existe $g \in \mathcal{H}$ entonces

$$\begin{aligned} \langle (P_F M_g|_F)^* \Psi_{z_j}, \Psi_{z_s} \rangle &= \langle \Psi_{z_j}, P_F M_g|_F \Psi_{z_s} \rangle \\ &= \langle \Psi_{z_j}, g \Psi_{z_s} \rangle \\ &= \langle \Psi_{z_j}, \widetilde{A} \Psi_{z_s} \rangle \\ &= \langle \Psi_{z_j}, P_F \widetilde{A} \Psi_{z_s} \rangle \\ &= \langle \Psi_{z_j}, A \Psi_{z_s} \rangle \\ &= \langle \Psi_{z_j}, X \Psi_{z_s} \rangle \\ &= \langle X^* \Psi_{z_j}, \Psi_{z_s} \rangle \end{aligned}$$

de donde

$$X = P_F M_g|_F.$$

Además, como $g \in H^\infty$ se cumple que

$$\|X\| = \|P_F M_g\| \leq \|M_g\| = \|g\|_\infty \leq 1.$$

$\square$

El Teorema 3.3 resulta una herramienta útil en el tratamiento de otros problemas clásicos de interpolación, tal como se muestra a continuación.

Se comenzará considerando el operador de traslación y algunos subespacios invariantes asociados.

Sea $S : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ el operador de traslación (shift), es decir $Sf = e_1 f$ para $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Lema 3.5. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) H^2 *es invariante por* S*, es decir,* $SH^2 \subset H^2$.

(b) H^2_- *es invariante por* S^{-1}*, es decir,* $S^{-1}H^2_- \subset H^2_-$.

Demostración.

(a) Si $g \in H^2$ entonces existe $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ tal que

$$g = \sum_{n\geq 0} \lambda_n e_n.$$

Luego,

$$Sg = S\left(\sum_{n\geq 0} \lambda_n e_n\right) = \sum_{n\geq 0} \lambda_n e_{n+1} = \sum_{k\geq 1} \lambda_{k-1} e_k \in H^2_-.$$

De donde,

$$SH^2 \subset H^2.$$

(b) Si $g \in H^2_-$ entonces existe $\{\lambda_n\}_{n<0}$ tal que

$$g = \sum_{n<0} \lambda_n e_n.$$

Sigue que

$$S^{-1}g = S^{-1}\sum_{n<0} \lambda_n e_n = \sum_{n<0} \lambda_n e_{n-1} = \sum_{k<-1} \lambda_{k+1} e_k \in H^2_-.$$

Por lo tanto,

$$S^{-1}H^2_- \subset H^2_-.$$

□

Dado $n \in \mathbb{N}$ sea K_n el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T})$ generado por $\{e_j\}_{j=0}^n$, es decir,

$$K_n = \bigvee_{j=0}^{n} e_j = \bigvee_{j=0}^{n} \{\lambda_j e_j(\cdot)\}_{\lambda_j \in \mathbb{C}}.$$

Lema 3.6. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $H^2 \ominus K_n$ *es invariante por* S*, es decir,* $S(H^2 \ominus K_n) \subset H^2 \ominus K_n$.

(b) $K_n \oplus H^2_-$ *es invariante por* S^{-1}*, es decir,* $S^{-1}(K_n \oplus H^2_-) \subset K_n \oplus H^2_-$.

Demostración.

(a) Si $g \in H^2 \ominus K_n$ entonces existe $\{\lambda_j\}_{j \geq n+1}$ tal que

$$g = \sum_{j \geq n+1} \lambda_j e_j$$

y

$$Sg = S\left(\sum_{j \geq n+1} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j \geq n+1} \lambda_j e_{j+1} = \sum_{l \geq n+2} \lambda_{l-1} e_l \in H^2 \ominus K_n.$$

Luego,

$$S(H^2 \ominus K_n) \subset H^2 \ominus K_n.$$

(b) Es análogo. $\square$

A continuación se señalan algunos operadores asociados a algunos tipos de sucesiones.

A una sucesión bilateral $\{c_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ se le puede asociar el operador lineal $B_b : H^2 \to H^2$ dado por

$$\langle B_b e_j, e_i \rangle = c_{i-j}$$

para $i, j \in \mathbb{N}$.

De forma similar a una sucesión $\{c_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ se le puede asociar el operador lineal $B : H^2 \to H^2$ dado por

$$\langle B e_j, e_i \rangle = \begin{cases} c_{i-j}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases}$$

para $i, j \in \mathbb{N}$.

A $\{c_j\}_{j=-n}^{n} \subset \mathbb{C}$ se le puede asociar el operador lineal $A_b : K_n \to K_n$ dado por

$$\langle A_b e_j, e_i \rangle = c_{i-j}$$

para $i, j = 0, \cdots, n$.

De forma similar a $\{c_j\}_{j=0}^n \subset \mathbb{C}$ se le puede asociar el operador lineal $A : K_n \to K_n$ dado por

$$\langle Ae_j, e_i\rangle = \begin{cases} c_{i-j}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases}$$

para $i, j = 0, \cdots, n$.

En el teorema de Carathéodory-Féjer interviene este último operador. La proposición siguiente se usará en la demostración de este teorema.

Lema 3.7. *Dada $\{c_j\}_{j=0}^n \subset \mathbb{C}$ sea $A : K_n \to K_n$ el operador lineal dado por*

$$\langle Ae_j, e_i\rangle = \begin{cases} c_{i-j}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases}$$

para $i, j = 0, \cdots, n$. Entonces $A = P_{K_n} M_f|_{K_n}$, donde $f = \sum_{j=0}^n c_j\, e_j$ y $M_f : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ el operador de multiplicación por f.

Demostración. Para $i, j = 0, \cdots, n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle P_{K_n} M_f e_j, e_i\rangle &= \langle e_j f, e_i\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^n c_k e_k e_j, e_i \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \langle e_{j+k}, e_i\rangle \\ &= \begin{cases} 0, & i < j \\ c_{i-j}, & j \leq i \end{cases} \\ &= \langle Ae_j, e_i\rangle \end{aligned}$$

lo que prueba que

$$A = P_{K_n} M_f|_{K_n}.$$

□

Lema 3.8. *Dados $\{c_j\}_{j=0}^n$ sean*

$$f = \sum_{j=0}^n c_j\, e_j\,,$$

$M_f : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ *el operador de multiplicación por* f *y* $A = P_{K_n} M_f|_{K_n}$. *Entonces*

(a) $P_{K_n} S P_{K_n} M_f|_{K_n} = P_{K_n} M_f P_{K_n} S|_{K_n}$.

(b) *A conmuta con* $P_{K_n} S|_{K_n}$.

Demostración.

(a) Si $g \in K_n$ entonces existe $\{\lambda_j\}_{j=0}^n$ tal que

$$g = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \, e_j.$$

Luego

$$\begin{aligned} fg &= \left(\sum_{l=0}^{n} c_l \, e_l \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \, e_j \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} c_l \, \lambda_j \, e_{j+l} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n+j} c_{k-j} \, \lambda_j \, e_k \end{aligned}$$

A continuación se dará una fórmula para $P_{K_n}(fg)$.

$$P_{K_n}(fg) = P_{K_n} \left(\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n+j} c_{k-j} \, \lambda_j \, e_k \right) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} c_{k-j} \, \lambda_j \, e_k.$$

Por lo tanto

$$e_1 (P_{K_n} M_f) g = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} c_{k-j} \, \lambda_j \, e_{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=j+1}^{n+1} c_{l-j-1} \, \lambda_j \, e_l.$$

De donde

$$(P_{K_n} S P_{K_n} M_f) g = \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=j+1}^{n} c_{l-j-1} \, \lambda_j \, e_l. \tag{3.1}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} e_1 g &= e_1 \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \, e_j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \, e_{j+1} \\ &= \sum_{l=1}^{n+1} \lambda_{l-1} \, e_l \end{aligned}$$

Luego

$$P_{K_n} e_1 g = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{l-1}\, e_l.$$

Sigue que

$$\begin{aligned}(M_f P_{K_n} S)g &= \left(\sum_{j=0}^{n} c_j\, e_j\right)\left(\sum_{l=1}^{n} \lambda_{l-1}\, e_l\right)\\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_j\, \lambda_{l-1}\, e_{j+l}\\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{m=j+1}^{n+j} c_j\, \lambda_{m-j-1}\, e_m\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}(P_{K_n} M_f P_{K_n} S)g &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{m=j+1}^{n} c_j\, \lambda_{m-j-1}\, e_m\\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j-1} c_j\, \lambda_k\, e_{k+j+1}\\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=j+1}^{n} c_{l-j-1}\, \lambda_j\, e_l.\end{aligned}$$

Luego

$$(P_{K_n} M_f P_{K_n} S)g = \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=j+1}^{n} c_{l-j-1}\, \lambda_j\, e_l. \tag{3.2}$$

De (3.1) y (3.2) sigue que

$$(P_{K_n} S P_{K_n} M_f)g = (P_{K_n} M_f P_{K_n} S)g.$$

(b) De (a) sigue que

$$P_{K_n} S A = P_{K_n} S P_{K_n} M_f|_{K_n} = P_{K_n} M_f P_{K_n} S|_{K_n} = A P_{K_n} S|_{K_n}.$$

Es decir, A conmuta con $P_{K_n} S|_{K_n}$. □

Lema 3.9. *Dados* $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ *sean*

$$f = \sum_{j=0}^{n} c_j\, e_j\,,$$

$M_f : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ *el operador de multiplicación por* f *y* $A = P_{K_n} M_f|_{K_n}$. *Entonces*

$$(AP_{K_n})S|_{H^2} = P_{K_n \oplus H^2_-} S(AP_{K_n}).$$

Demostración. Por el Lema 3.8, A conmuta con $P_{K_n} S|_{K_n}$. Sea

$$X = P_{K_n} S|_{K_n},$$

luego $AX = XA$.

Sigue que para $f \in H^2$.

$$\begin{aligned}(AP_{K_n})Sf &= AP_{K_n} SP_{K_n} f + AP_{K_n} SP_{H^2 \ominus K_n} f \\ &= AXP_{K_n} f \\ &= XAP_{K_n} f.\end{aligned}$$

De donde

$$(AP_{K_n})Sf = XAP_{K_n} f. \tag{3.3}$$

Por otra parte

$$P_{K_n \oplus H^2_-} S(AP_{K_n})f = P_{K_n} SAP_{K_n} f + P_{H^2_-} SAP_{K_n} f.$$

Como

$$S(K_n) \subset S(H^2) \subset H^2 \perp H^2_-$$

sigue que

$$P_{K_n \oplus H^2_-} S(AP_{K_n})f = P_{K_n} SAP_{K_n} f = XAP_{K_n} f.$$

Luego

$$P_{K_n \oplus H^2_-} S(AP_{K_n})f = XAP_{K_n} f. \tag{3.4}$$

De (3.3) y (3.4) sigue que

$$(AP_{K_n})S|_{H^2} = P_{K_n \oplus H^2_-} S(AP_{K_n}).$$

□

Ahora se está en condiciones de mostrar cómo el Teorema 3.3 resulta útil en el tratamiento de otro problema clásico de interpolación.

Teorema 3.10 (Carathéodory-Féjer)**.** *Para $n \in \mathbb{N}$ sean $\{c_j\}_{j=0}^n \subset \mathbb{C}$ y $A : K_n \to K_n$ el operador lineal dado por*

$$\langle Ae_j, e_i\rangle = \begin{cases} c_{i-j}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases}$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *existe $h \in H^\infty$ tal que $\|h\|_\infty \leq 1$ y $\widehat{h}(j) = c_j$ para $j = 0, \ldots, n$.*

(b) *A es una contracción.*

Demostración. Por el Lema 3.7

$$A = P_{K_n} M_f|_{K_n}$$

donde $f = \sum_{j=0}^n c_j\, e_j$ y M_f el operador de multiplicación por f.

(a) $\Rightarrow$ (b) Suponga que existe $h \in H^\infty$ tal que $\|h\|_\infty \leq 1$ y

$$\widehat{h}(j) = c_j \qquad \text{para} \quad j = 0, \ldots, n.$$

Para $i, j = 0, \ldots, n$ se tiene que

$$|\langle P_{K_n} M_f e_j, e_i\rangle| = |\langle Ae_j, e_i\rangle| \leq |c_{i-j}| = |\widehat{h}(i-j)| \leq \|h\|_\infty \leq 1.$$

Por lo tanto A es una contracción.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponga que A es una contracción.

Se tiene que K_n es subespacio cerrado de H^2, $SH^2 \subset H^2$ y $S^{-1}(K_n \oplus H^2_-) \subset K_n \oplus H^2_-$, en virtud de los Lemas 3.5 y 3.6.

Por el Lema 3.9

$$(AP_{K_n})S|_{H^2} = P_{K_n \oplus H^2_-} S(AP_{K_n}).$$

Además

$$L^2(\mathbb{T}) = \bigvee_{n \leq 0} S^n(H^2_+) \quad \text{y} \quad L^2(\mathbb{T}) = \bigvee_{n \geq 0} S^n(K_n \oplus H^2_-).$$

Sea

$$T = AP_{K_n},$$

sigue que

$$TS|_{H^2} = P_{K_n \oplus H^2_-} ST.$$

Además,

$$\|T\| = \|AP_{K_n}\| \leq \|A\|\|P_{K_n}\| = \|A\|,$$

y para $k \in K_n$ se cumple

$$\|Ak\| = \|AP_{K_n}k\| = \|Tk\| \leq \|T\|\|k\|,$$

lo que prueba que

$$\|T\| = \|A\|.$$

Sean $F_1 = F_2 = L^2(\mathbb{T})$, $U_1 = U_2 = S$, $E_1 = H^2$, $E_2 = K_n \oplus H^2_-$. Por el Teorema 3.3 existe $\widetilde{T} \in L(L^2)$ tal que $\widetilde{T}S = S\widetilde{T}$, $T = P_{K_n \oplus H^2_-}\widetilde{T}|_{H^2}$ y $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Por el Teorema 2.10 existe $h \in L^\infty$ tal que $\|h\|_\infty = \|\widetilde{T}\|$ y $\widetilde{T}g = M_h g$, donde $M_h : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ el operador de multiplicación por h.

Como A es una contracción y

$$\|h\|_\infty = \|\widetilde{T}\| = \|T\| = \|A\|$$

se obtiene que $\|h\|_\infty \leq 1$.

A continuación se probará que $h \in H^\infty$. Como $A : K_n \to K_n$ y

$$h = M_h e_0 = \widetilde{T}e_0 = Te_0 = AP_{K_n}e_0$$

sigue que $h \in K_n \subset H^2$. Pero $H^2 \cap L^\infty \subset H^\infty$, por lo tanto $h \in H^\infty$.

Se observa que

$$h = M_h e_0 = \widetilde{T}e_0 = Te_0 = AP_{K_n}e_0 = Ae_0 = P_{K_n}M_f e_0.$$

Por lo tanto, para $j = 0, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(j) &= \langle h, e_j \rangle \\
&= \langle P_{K_n} M_f e_0, e_j \rangle \\
&= \langle f, e_j \rangle \\
&= \sum_{l=0}^{n} c_l \langle e_l, e_j \rangle \\
&= c_j.
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 4

Espacios de Sobolev de orden entero

En este capítulo se introducen los espacios de Sobolev y se estudian algunas de sus propiedades.

En lo que sigue, se trabajará en $\mathbb{R}^n$ dotado del producto interno usual y la norma euclideana.

Una n-tupla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de enteros no negativos será llamada *multi-índice.*

Dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un multi-índice, el símbolo x^α representa al monomio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, es decir

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

y el grado de x^α es el entero positivo

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Para $1 \leq i \leq n$ sea

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se considerará el operador diferencial

$$D^\alpha = D^{\alpha_1} \cdots D^{\alpha_n}.$$

El operador D^α es de orden $|\alpha|$ y $D^{(0,\ldots,0)}$ es el operador identidad.

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$ y $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Se denota por $C^m(\Omega)$ al espacio de funciones $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que ϕ y $D^\alpha \phi$ son continuas en Ω para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq m$. Se define

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} C^m(\Omega).$$

El conjunto $C_0^m(\Omega)$ es el subespacio de $C^m(\Omega)$ formado por las funciones con soporte compacto en Ω.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Se dice que una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es *localmente integrable* si u es integrable sobre cualquier conjunto compacto A tal que $\overline{A} \subset \Omega$.

El conjunto de funciones localmente integrables sobre Ω se denotará por el símbolo $L^1_{loc}(\Omega)$.

Una *distribución de tipo integral* es un operador de la forma

$$T_u(\phi) = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx$$

con $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si existe $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que se satisface la relación

$$T_v = D^\alpha T_u$$

para algún multi-índice α, entonces se dice que v es la *derivada débil o distribucional* de orden $|\alpha|$ de u. Esta derivada se suele denotar como

$$v \overset{d}{=} D^\alpha u.$$

Dados $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ p \geq 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, considérese el subespacio de $L^p(\Omega)$ dado por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\ :\ v \overset{d}{=} D^\alpha u \in L^p(\Omega)\,\text{para todo multi-índice}\,\alpha\,\text{con}\,|\alpha| \leq m\}.$$

Se definen las siguientes funciones sobre $W^{m,p}$:

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right\}^{1/p}$$

si $1 \leq p < \infty$.

$$\|u\|_{m,\infty} = \sup\{\|D^\alpha u\|_\infty\ :\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Se llama *espacio de Sobolev de orden* m sobre Ω al par $(W^{m,p}(\Omega), \|\,\|_{m,p})$ con $1 \leq p \leq \infty$

Las principales características de los espacios de Sobolev se resumen en los siguientes teoremas.

Teorema 4.1. *El par* $(W^{m,p}(\Omega), \| \|_{m,p})$ *es un espacio de Banach.*

Demostración.

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $W^{m,p}(\Omega)$. Entonces, si α es un multi-índice tal que $|\alpha| \leq m$ se tiene que $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Por la completitud de $L^p(\Omega)$ se sabe que existen u, $v \in L^p(\Omega)$ tales que

$$u_n \to u \quad \text{y} \quad D^\alpha u_n \to v \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Ahora bien, dado que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ la función u_n determina una distribución integral T_{u_n}. Si $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$, entonces por la desigualdad de Hölder se cumple que

$$|T_{u_n}(\phi) - T_u(\phi)| \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)||\phi(x)|dx \leq \|\phi\|_{p'}\|u_n - u\|_p$$

donde p' es el conjugado de p.

Análogamente se prueba que

$$T_{D^\alpha u_n}(\phi) \to T_v(\phi)$$

para todo $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$.

Para terminar, se verá que $u \in W^{m,p}(\Omega)$. En efecto, una aplicación directa del teorema de integración por partes nos permite escribir lo siguiente:

$$T_v(\phi) = \lim_n T_{D^\alpha u_n}(\phi) = \lim_n (-1)^{|\alpha|} T_{u_n}(D^\alpha \phi) = D^\alpha T_u(\phi)$$

para cada $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$, lo que prueba que

$$v \overset{d}{=} D^\alpha u$$

y se tiene así la completitud. □

Teorema 4.2. $W^{m,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach separable si* $1 \leq p < \infty$ *y si* $1 < p < \infty$ *entonces* $W^{m,p}(\Omega)$ *es reflexivo y uniformemente convexo.*

Demostración.

Se denota por N al número de multi-índices α tales que $0 \leq |\alpha| \leq m$.

Para $p \in [1, \infty]$ sea

$$L^p_N(\Omega) = L^p(\Omega) \times \overset{N}{\cdots} \times L^p(\Omega).$$

En estos espacios las siguientes funciones son normas:

$$\|u\|_{L^p_N} = \left(\sum_{j=i}^{N} \|u_j\|_p^p\right)^{1/p}$$

para $u \in L^p_N$, $1 \leq p < \infty$ y

$$\|u\|_{L^\infty_N} = \sup\{\|u_j\|_\infty \,:\, j = 1, \cdots, N\}$$

para $u \in L^\infty_N$.

Se sabe que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach separable si $1 \leq p < \infty$, además es reflexivo y uniformemente convexo si $1 < p < \infty$. Por ende, el producto finito $L^p_N(\Omega)$ también tiene tales propiedades.

Sea $P : W^{m,p}(\Omega) \to L^p_N(\Omega)$ el operador dado por

$$P(u) = (D^\alpha u)_{0 \leq |\alpha| \leq m}\,.$$

Es claro que P es lineal, pues el operador diferencial D^α lo es. Además P es una isometría, pues por construcción se observa que

$$\|P(u)\|_{L^p_N} = \|u\|_{m,p}.$$

Luego P es un isomorfismo isométrico de $W^{m,p}$ sobre algún subespacio cerrado $W \subset L^p_N$. Entonces, W es separable si $1 \leq p < \infty$, además es reflexivo y uniformemente convexo si $1 < p < \infty$. Como

$$W^{m,p}(\Omega) = P^{-1}(W),$$

se tiene el resultado.

□

En lo que sigue, se establece una caracterización básica del espacio dual de $W^{m,p}(\Omega)$. Primero se probará una generalización del teorema de representación de Riesz para el caso n dimensional. Por simplicidad, se asume la notación

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

cuando la integral tenga sentido.

Lema 4.3. *Sea $1 \leq p < \infty$ y q su índice conjugado. Para cada $L \in (L^p_N(\Omega))^*$ existe un único $v \in L^q_N(\Omega)$ tal que para todo $u \in L^p_N$ se cumple que*

$$L(u) = \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, v_j \rangle.$$

Demostración.

Dados $1 \leq j \leq N$ y $\omega \in L^p(\Omega)$ se define el vector

$$\omega_{(j)} = (\omega\, \delta_{ij})_{i=1}^{N}$$

en $L^p_N(\Omega)$.

Si $L \in (L^p_N(\Omega))^*$, entonces la relación

$$L_j(\omega) = L(\omega_{(j)})$$

define un operador en $(L^p(\Omega))^*$. Por el teorema de Riesz en una dimensión, se sabe que existe un único $v_j \in L^q(\Omega)$ tal que si $\omega \in L^p(\Omega)$ se cumple que

$$L(\omega_{(j)}) = L_j(\omega) = \langle \omega, v_j \rangle.$$

Luego, para $u \in L^p_N(\Omega)$ se tiene:

$$L(u) = L\left(\sum_{j=1}^{N} u_{j(j)} \right) = \sum_{j=1}^{N} L(u_{j(j)}) = \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, v_j \rangle$$

probando así el resultado. □

Ahora se está en condiciones de probar el siguiente resultado.

Teorema 4.4. *Sea $1 \leq p < \infty$ y q su índice conjugado. Para cada $L \in (W^{m,p}(\Omega))^*$ existe un elemento $v = (v_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m} \in L^p_N(\Omega)$ tal que*

$$L(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle$$

para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Demostración.

Por lo hecho en la demostración del Teorema 4.2 se sabe que

$$W^{m,p}(\Omega) = P^{-1}(W),$$

donde W es un subespacio cerrado de $L^p_N(\Omega)$ y P es un isomorfismo isométrico.

Dado $L \in (W^{m,p}(\Omega))^*$ sea L^* un operador lineal sobre W tal que

$$L^*(P(u)) = L(u)$$

Como P es isomorfismo isométrico, entonces $L^* \in W^*$ y

$$\|L^*\|_{W^*} = \|L\|_{(W^{m,p}(\Omega))^*}.$$

El teorema de Hahn-Banach garantiza la existencia de una extensión lineal de L^* a todo el espacio $L^p_N(\Omega)$. Sea $\widehat{L}$ tal extensión.

Por el lema anterior, existe $v = (v_\alpha)_{0\leq|\alpha|\leq m} \in L^q_N(\Omega)$ tal que

$$\widehat{L}(\cdot) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle \cdot, v_\alpha \rangle.$$

En particular, si $u \in W^{m,p}(\Omega)$ se obtiene

$$L(u) = L^*(P(u)) = \widehat{L}(P(u)) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle$$

lo que concluye la prueba. $\square$

Capítulo 5

Problemas de interpolación en un espacio de Sobolev

A continuación se presenta un resultado de Agler, análogo al resultado clásico de interpolación de Pick en el plano complejo, en el cual se sustituye el espacio de Hardy de las funciones analíticas con serie de potencias de cuadrado sumable, por el espacio de Sobolev de las funciones complejas definidas en el intervalo $(0,1)$ cuyas derivadas están en $L^2(0,1)$.

Se dará una demostración alternativa a la de Agler, usando una versión, dada por Arocena, del teorema de levantamiento del conmutante de Sz.-Nagy y Foias.

A lo largo del capítulo se considera el espacio

$$\mathcal{H} = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ tales que } f \text{ es absolutamente continua y } f, f' \in L^2(0,1)\}.$$

Si se define el producto

$$[f,g] := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt + \int_0^1 f'(t)\overline{g'(t)}\,dt$$

es fácil ver que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con respecto a la norma inducida por este producto, es decir $\|f\|_{\mathcal{H}} = [f,f]^{\frac{1}{2}}$ para $f \in \mathcal{H}$.

Para $s \in (0,1)$ sea

$$k_s(t) = \begin{cases} a_s e^t + b_s e^{-t}, & t \le s \\ \\ c_s e^t + d_s e^{-t}, & t \ge s \end{cases}$$

con

$$a_s = b_s = \frac{e^s + e^2 e^{-s}}{2(e^2-1)},$$
$$c_s = \frac{e^s + e^{-s}}{e^2-1},$$
$$d_s = e^2 c_s.$$

Lema 5.1. *Para $s \in (0,1)$ sean $\mathcal{H}$ y k_s como antes. Sea $K : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{C}$, tal que*

$$K(t,s) = k_s(t)$$

entonces K es el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{H}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $s \in (0,1)$ fijo y sea $f \in \mathcal{H}$, entonces se cumple que:

$$\begin{aligned}
[f, K(\cdot, s)] &= \int_0^1 f(t)k_s(t)dt + \int_0^1 f'(t)k_s'(t)dt \\
&= \int_0^s f(t)(a_s e^t + b_s e^{-t})dt + \int_s^1 f(t)(c_s e^t + d_s e^{-t})dt \\
&+ \int_o^s f'(t)(a_s e^t - b_s e^{-t})dt + \int_s^1 f'(t)(c_s e^t - d_s e^{-t})dt.
\end{aligned}$$

Ahora bien, integrando por partes se tiene que

$$\int_0^s f(t)(a_s e^t + b_s e^{-t})dt = f(s)(a_s e^s - b_s e^{-s}) - \int_0^s f'(t)(a_s e^t - b_s e^{-t})dt$$

y

$$\int_s^1 f(t)(c_s e^t + d_s e^{-t})dt = -f(s)(c_s e^s - d_s e^{-s}) - \int_s^1 f'(t)(c_s e^t - d_s e^{-t})dt$$

y así, al sustituir, se obtiene

$$[f, K(\cdot, s)] = f(s).$$

Lo que prueba que $K(\cdot,\cdot)$ es el núcleo reproductor de $\mathcal{H}$. $\square$

Para $\psi : (0,1) \to \mathbb{C}$ sea

$$\|\psi\|_{[\infty]} := \sup\{\|\psi f\|_{\mathcal{H}} \,:\, f \in \mathcal{H},\ \|f\|_{\mathcal{H}} = 1\}.$$

Si $\psi : (0,1) \to \mathbb{C}$ entonces para $f \in \mathcal{H}$ el operador dado por

$$M_\psi f = \psi f$$

es el operador multiplicación por ψ.

Como es usual

$$\|M_\psi\| = \sup\{\|\psi f\|_{\mathcal{H}} \,:\, f \in \mathcal{H},\ \|f\|_{\mathcal{H}} = 1\},$$

es decir $\|M_\psi\| = \|\psi\|_{[\infty]}$.

Son de particular interés en este trabajo los operadores de la forma M_{τ_n}, donde $\tau_n : (0,1) \to \mathbb{C}$ es la función dada por $\tau_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Lema 5.2. *Sean $\mathcal{H}$ como antes y $F_i \subset \mathcal{H}$ para $i = 1, 2$ dos subespacios tales que $\tau_n \in F_1$ para todo $n \geq 0$. Si existe un operador $T \in L(F_1, F_2)$ que conmuta con el operador M_{τ_1}, entonces existe una función $g \in \mathcal{H}$ tal que $T = M_g$ y $\|T\| = \|g\|_{[\infty]}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $g = T\tau_0$. Note que g está bien definida, porque por hipótesis $\tau_0 \in F_1$. Se puede considerar el operador M_g. Por las observaciones anteriores se tiene que $\|M_g\| = \|g\|_{[\infty]}$. Además, para todo entero positivo n se tiene que

$$\begin{aligned} T\tau_n &= T(M_{\tau_n}\tau_0) \\ &= T(M_{\tau_1})^n\tau_0 \\ &= (M_{\tau_1})^n T\tau_0 \\ &= (M_{\tau_1})^n g \end{aligned}$$

luego

$$(T\tau_n)(t) = t^n g(t) = (M_g\tau_n)(t)$$

para todo $t \in (0,1)]$. Es decir, $T = M_g$ en el conjunto $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es denso en $\mathcal{H}$. □

El siguiente teorema se debe a Agler [**2**], su demostración se basa en la desigualdad de Cauchy, condiciones para que ciertos conjuntos tengan un mínimo y la compacidad débil* de la bola unitaria cerrada de un espacio dual (teorema de Banach - Bourbaki - Alaoglu).

A continuación se dará una demostración diferente basada en la versión del teorema de levantamiento del conmutante antes expuesta.

Teorema 5.3. [**2**] *Sea $\mathcal{H}$ como antes. Sean $\mathcal{J}$ un conjunto finito de índices, $\{s_j : j \in \mathcal{J}\}$ un conjunto de puntos distintos en $(0,1)$ y $\{w_j : j \in \mathcal{J}\} \subset \mathbb{C}$. Sean*

$$\mathcal{G} = \{h \in \mathcal{H} : h(s_j) = w_j \ \textit{para todo} \ j \in \mathcal{J} \ \ \textit{y} \ \ \|h\|_{[\infty]} \leq 1\}$$

y $M : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$M(i,j) = (1 - w_i\overline{w}_j)K(t_j, t_i)$$

donde K es la función núcleo reproductor del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Entonces $\mathcal{G}$ es no vacío si y sólo si M es definida positiva.

DEMOSTRACIÓN. Para $s \in (0,1)$ sea

$$k_s(t) = K(t,s)$$

con $t \in (0,1)$. Sean $\mathcal{J}$ un conjunto finito de índices, $\{s_j : j \in \mathcal{J}\} \subset (0,1)$ y $\{w_j : j \in \mathcal{J}\} \subset \mathbb{C}$.

Sean

$$\mathcal{F} = \bigvee_{j \in \mathcal{J}} \{k_{s_j}\}$$

y sea $X : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ el operador dado por

$$X k_{s_j} = \overline{w}_j k_{s_j}.$$

En virtud del Lema 2.8 basta demostrar que $\mathcal{G}$ es no vacío si y sólo si $\|X\| \leq 1$.

Supóngase que $\|X\| \leq 1$. Para usar el Teorema 3.3 sean $U_1 = U_2 = M_{\tau_1}$. Sean $\overline{\mathcal{F}}$ la clausura de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{H}$ y

$$\mathcal{H}_0 = \{h \in \mathcal{H} \,:\, h(s_j) = 0 \text{ para todo } j \in \mathcal{J}\}.$$

Sean $E_1 = \mathcal{H}$, $E_2 = \overline{\mathcal{F}} \oplus \mathcal{H}_0$, $F_1 = \bigvee_{n \leq 0} U_1^n E_1$, $F_2 = \bigvee_{n \geq 0} U_2^n E_2$ y $A \in L(E_1, E_2)$ dado por

$$Af = X^* P_{\overline{\mathcal{F}}} f.$$

Para $j \in \mathcal{J},\ n \in \mathbb{N}$ y $u \in \mathcal{H}_0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
[AU_1\tau_n, k_{s_j} + u] &= [AM_{\tau_1}\tau_n, k_{s_j}] \\
&= [\tau_{n+1}, Xk_{s_j}] \\
&= [\tau_{n+1}, \overline{w}_j k_{s_j}] \\
&= w_j[\tau_{n+1}, k_{s_j}] \\
&= w_j(s_j)^{n+1} \\
&= s_j w_j s_j^n.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
s_j w_j s_j^n &= s_j w_j [\tau_n, k_{s_j}] \\
&= s_j[\tau_n, \overline{w}_j k_{s_j}] \\
&= s_j[\tau_n, Xk_{s_j}] \\
&= s_j[X^* P_{\overline{\mathcal{F}}}\tau_n, k_{s_j}] \\
&= s_j[A\tau_n, k_{s_j}]
\end{aligned}$$

Por la propiedad reproductiva

$$\begin{aligned} s_j[A\tau_n, k_{s_j}] &= s_j(A\tau_n)(s_j) \\ &= (U_2A\tau_n)(s_j) \\ &= [U_2A\tau_n, k_{s_j}] \\ &= [P_{E_2}U_2A\tau_n, k_{s_j}]. \end{aligned}$$

Así

$$AU_1|_{E_1} = P_{E_2}U_2A.$$

Ahora bien, por el Teorema 3.3 existe un operador $\widetilde{A} \in L(F_1, F_2)$ que conmuta con el operador M_{τ_1} tal que $A = P_{E_2}\widetilde{A}|_{E_1}$ y $\|A\| = \|\widetilde{A}\|$.

Como $\widetilde{A}M_{\tau_1} = M_{\tau_1}\widetilde{A}$, en virtud del Lema 5.2, existe $g \in \mathcal{H}$ tal que $\widetilde{A} = M_g$ y $\|\widetilde{A}\| = \|g\|_{[\infty]}$.

Note que si $f \in \mathcal{F}$ entonces se cumple que

$$X^*f = X^*P_{\overline{\mathcal{F}}}f = Af = P_{E_2}\widetilde{A}f = P_{E_2}M_gf = P_{E_2}gf$$

Por otro lado, si $j \in \mathcal{J}$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} g(s_j) &= [g, k_{s_j}] \\ &= [\widetilde{A}\tau_0, k_{s_j}] \\ &= [P_{E_2}\widetilde{A}\tau_0, k_{s_j}] \\ &= [A\tau_0, k_{s_j}]. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} [A\tau_0, k_{s_j}] &= [X^*P_{\overline{\mathcal{F}}}\tau_0, k_{s_j}] \\ &= [P_{\overline{\mathcal{F}}}\tau_0, Xk_{s_j}] \\ &= [\tau_0, \overline{w}_jk_{s_j}] \\ &= w_j[\tau_0, k_{s_j}] \\ &= w_j\tau_0(s_j) \\ &= w_j. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{G}$ es no vacío.

Recíprocamente, si existe g en $\mathcal{G}$ entonces

$$\begin{aligned}
[(P_{\overline{\mathcal{F}}} M_g|_{\overline{\mathcal{F}}})^* k_{s_j}, k_{s_i}] &= [k_{s_j}, P_{\overline{\mathcal{F}}} M_g|_{\overline{\mathcal{F}}} k_{s_i}] \\
&= [k_{s_j}, g k_{s_i}] \\
&= [k_{s_j}, \widetilde{A} k_{s_i}] \\
&= [k_{s_j}, P_{\overline{\mathcal{F}}} \widetilde{A} k_{s_i}] \\
&= [k_{s_j}, A k_{s_i}] \\
&= [k_{s_j}, X^* k_{s_i}] \\
&= [X k_{s_j}, k_{s_i}]
\end{aligned}$$

de donde

$$X = (P_{\overline{\mathcal{F}}} M_g|_{\overline{\mathcal{F}}})^*.$$

Además se tiene que

$$\|X\| = \|(P_{\overline{\mathcal{F}}} M_g)^*\| \leq \|M_g^*\| = \|g\|_{[\infty]} \leq 1.$$

$\square$

De forma análoga es posible establecer un resultado análogo al teorema de Carathéodory-Féjer para el espacio de Sobolev $\mathcal{H}$.

Se comenzará considerando un operador de multiplicación y algunos subespacios invariantes asociados.

Para $n \in \mathbb{N}$ sean $\widetilde{\tau}_n : (0,1) \to \mathbb{C}$ las funciones obtenidas a partir de las funciones $\tau_n(t)$ después de ortonormalizarlas con respecto al producto definido en $\mathcal{H}$ y sea $\mathcal{F}_n$ el subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ generado por $\{\widetilde{\tau}_j\}_{j=0}^n$, es decir,

$$\mathcal{F}_n = \bigvee_{j=0}^{n} \{\widetilde{\tau}_j\}.$$

Para estas funciones se tiene el siguiente resultado.

Lema 5.4. *Sea $M_{\widetilde{\tau}_1}$ el operador de multiplicación por $\widetilde{\tau}_1$. Entonces el conjunto $\mathcal{H} \ominus \mathcal{F}_n$ es invariante por $M_{\widetilde{\tau}_1}$, es decir, $M_{\widetilde{\tau}_1}(\mathcal{H} \ominus \mathcal{F}_n) \subset \mathcal{H} \ominus \mathcal{F}_n$.*

DEMOSTRACIÓN.

Si $g \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{F}_n$ entonces existe $\{\lambda_j\}_{j\geq n+1}$ tal que

$$g = \sum_{j\geq n+1} \lambda_j \widetilde{\tau}_j$$

y

$$M_{\widetilde{\tau}_1} g = M_{\widetilde{\tau}_1}\left(\sum_{j\geq n+1} \lambda_j \widetilde{\tau}_j\right) = \sum_{j\geq n+1} \lambda_j \widetilde{\tau}_{j+1} = \sum_{l\geq n+2} \lambda_{l-1} \widetilde{\tau}_l \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{F}_n.$$

Luego,

$$M_{\widetilde{\tau}_1}(\mathcal{H} \ominus \mathcal{F}_n) \subset \mathcal{H} \ominus \mathcal{F}_n.$$

□

Los lemas siguientes se usarán en la demostración del Teorema 5.7.

Lema 5.5. *Dada $\{c_j\}_{j=0}^n \subset \mathbb{C}$ sea $A : \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n$ el operador lineal dado por*

$$[A\widetilde{\tau}_j, \widetilde{\tau}_i] = \begin{cases} c_{i-j}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases}$$

para $i, j = 0, \cdots, n$. Entonces $A = P_{\mathcal{F}_n} M_f|_{\mathcal{F}_n}$, donde $f = \sum_{j=0}^n c_j \widetilde{\tau}_j$ y $M_f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ el operador de multiplicación por f.

DEMOSTRACIÓN. Para $i, j = 0, \cdots, n$ se tiene que

$$\begin{aligned} [P_{\mathcal{F}_n} M_f \widetilde{\tau}_j, \widetilde{\tau}_i] &= [\widetilde{\tau}_j f, \widetilde{\tau}_i] \\ &= \left[\sum_{k=0}^n c_k \widetilde{\tau}_k \widetilde{\tau}_j, \widetilde{\tau}_i\right] \\ &= \sum_{k=0}^n c_k [\widetilde{\tau}_{j+k}, \widetilde{\tau}_i] \\ &= \begin{cases} 0, & i < j \\ c_{i-j}, & j \leq i \end{cases} \\ &= [A\widetilde{\tau}_j, \widetilde{\tau}_i] \end{aligned}$$

lo que prueba que

$$A = P_{\mathcal{F}_n} M_f|_{\mathcal{F}_n}.$$

□

Lema 5.6. *Dados* $\{c_j\}_{j=0}^n \subset \mathbb{C}$ *sean*

$$f = \sum_{j=0}^{n} c_j \, \widetilde{\tau}_j \, ,$$

$M_f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *el operador de multiplicación por* f *y* $A = P_{\mathcal{F}_n} M_f|_{\mathcal{F}_n}$. *Entonces*

(a) $P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1} P_{\mathcal{F}_n} M_f|_{\mathcal{F}_n} = P_{\mathcal{F}_n} M_f P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1}|_{\mathcal{F}_n}$.

(b) A *conmuta con* $P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1}|_{\mathcal{F}_n}$.

Demostración.

(a) Si $g \in \mathcal{F}_n$ entonces existe $\{\lambda_j\}_{j=0}^n$ tal que

$$g = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \, \widetilde{\tau}_j .$$

Luego

$$\begin{aligned} fg &= \left(\sum_{l=0}^{n} c_l \, \widetilde{\tau}_l \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \, \widetilde{\tau}_j \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} c_l \, \lambda_j \, \widetilde{\tau}_{j+l} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n+j} c_{k-j} \, \lambda_j \, \widetilde{\tau}_k \end{aligned}$$

A continuación se dará una fórmula para $P_{\mathcal{F}_n}(fg)$.

$$P_{\mathcal{F}_n}(fg) = P_{\mathcal{F}_n} \left(\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n+j} c_{k-j} \, \lambda_j \, \widetilde{\tau}_k \right) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} c_{k-j} \, \lambda_j \, \widetilde{\tau}_k .$$

Por lo tanto

$$\tau_1 (P_{\mathcal{F}_n} M_f) g = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} c_{k-j} \, \lambda_j \, \widetilde{\tau}_{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=j+1}^{n+1} c_{l-j-1} \, \lambda_j \, \widetilde{\tau}_l .$$

De donde

$$(P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1} P_{\mathcal{F}_n} M_f) g = \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=j+1}^{n} c_{l-j-1} \, \lambda_j \, \widetilde{\tau}_l . \tag{5.1}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}_1 g &= \widetilde{\tau}_1 \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \,\widetilde{\tau}_j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \,\widetilde{\tau}_{j+1} \\ &= \sum_{l=1}^{n+1} \lambda_{l-1} \,\widetilde{\tau}_l\end{aligned}$$

Luego

$$P_{\mathcal{F}_n} \widetilde{\tau}_1 g = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{l-1} \,\widetilde{\tau}_l.$$

Sigue que

$$\begin{aligned}(M_f P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1})g &= \left(\sum_{j=0}^{n} c_j \,\widetilde{\tau}_j\right)\left(\sum_{l=1}^{n} \lambda_{l-1} \,\widetilde{\tau}_l\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_j \,\lambda_{l-1} \,\widetilde{\tau}_{j+l} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{m=j+1}^{n+j} c_j \,\lambda_{m-j-1} \,\widetilde{\tau}_m\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}(P_{\mathcal{F}_n} M_f P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1})g &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{m=j+1}^{n} c_j \,\lambda_{m-j-1} \,\widetilde{\tau}_m \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j-1} c_j \,\lambda_k \,\widetilde{\tau}_{k+j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=j+1}^{n} c_{l-j-1} \,\lambda_j \,\widetilde{\tau}_l.\end{aligned}$$

Luego

$$(P_{\mathcal{F}_n} M_f P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1})g = \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=j+1}^{n} c_{l-j-1} \,\lambda_j \,\widetilde{\tau}_l. \tag{5.2}$$

De (5.1) y (5.2) sigue que

$$(P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1} P_{\mathcal{F}_n} M_f)g = (P_{\mathcal{F}_n} M_f P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1})g.$$

(b) De (a) sigue que

$$P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1} A = P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1} P_{\mathcal{F}_n} M_f|_{\mathcal{F}_n} = P_{\mathcal{F}_n} M_f P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1}|_{\mathcal{F}_n} = A P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1}|_{\mathcal{F}_n}.$$

Es decir, A conmuta con $P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1}|_{\mathcal{F}_n}$. □

A continuación se muestra en el espacio de Sobolev $\mathcal{H}$ una versión del teorema de Carathéodory-Féjer.

Teorema 5.7. *Para $n \in \mathbb{N}$ sean $\{c_j\}_{j=0}^n \subset \mathbb{C}$ y $A : \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_n$ el operador lineal dado por*

$$[A\widetilde{\tau}_j, \widetilde{\tau}_i] = \begin{cases} c_{i-j}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases}$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *Existe $g \in \mathcal{H}$ tal que $\|g\|_{[\infty]} \leq 1$ y $[g, \widetilde{\tau}_j] = c_j$ para $j = 0, \ldots, n$.*

(b) *A es una contracción.*

Demostración. Por el Lema 5.5

$$A = P_{\mathcal{F}_n} M_f|_{\mathcal{F}_n}$$

donde $f = \sum_{j=0}^n c_j \, \widetilde{\tau}_j$ y M_f el operador de multiplicación por f.

(a) $\Rightarrow$ (b)

Suponga que existe $g \in \mathcal{H}$ tal que $\|g\|_{[\infty]} \leq 1$ y

$$[g, \widetilde{\tau}_j] = c_j \qquad \text{para} \quad j = 0, \ldots, n.$$

Para $i, j = 0, \ldots, n$ se tiene que

$$|[P_{\mathcal{F}_n} M_f \widetilde{\tau}_j, \widetilde{\tau}_i]| = |[A\widetilde{\tau}_j, \widetilde{\tau}_i]| \leq |c_{i-j}| = |[g, \widetilde{\tau}_{i-j}]| \leq \|g\|_{[\infty]} \leq 1.$$

Por lo tanto A es una contracción.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Suponga que A es una contracción.

Se sabe que $\mathcal{F}_n$ es subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $M_{\widetilde{\tau}_1}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ en virtud del Lema 5.4.

Por el Lema 5.6

$$(AP_{\mathcal{F}_n}) M_{\widetilde{\tau}_1} = P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1} (AP_{\mathcal{F}_n}).$$

Además

$$\mathcal{H} = \bigvee_{n\le 0} M_{\widetilde{\tau}_1}^n(\mathcal{F}_n) \quad \text{y} \quad \mathcal{H} = \bigvee_{n\ge 0} M_{\widetilde{\tau}_1}^n(\mathcal{H}).$$

Sea

$$T = AP_{\mathcal{F}_n},$$

sigue que

$$TM_{\widetilde{\tau}_1} = P_{\mathcal{F}_n} M_{\widetilde{\tau}_1} T.$$

Además,

$$\|T\| = \|AP_{\mathcal{F}_n}\| \le \|A\|\|P_{\mathcal{F}_n}\| = \|A\|,$$

y para $k \in \mathcal{F}_n$ se cumple

$$\|Ak\| = \|AP_{\mathcal{F}_n}k\| = \|Tk\| \le \|T\|\|k\|,$$

lo que prueba que

$$\|T\| = \|A\|.$$

Sean $F_1 = F_2 = \mathcal{H}$, $U_1 = U_2 = M_{\widetilde{\tau}_1}$, $E_1 = \mathcal{F}_n$, $E_2 = \mathcal{H}$. Por el Teorema 3.3 existe $\widetilde{T} \in L(\mathcal{H})$ tal que $\widetilde{T}M_{\widetilde{\tau}_1} = M_{\widetilde{\tau}_1}\widetilde{T}$, $T = P_{\mathcal{H}}\widetilde{T}|_{\mathcal{F}_n}$ y $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Además, por el Lema [5.2] existe $g \in \mathcal{H}$ tal que $\widetilde{T} = M_g$ y

$$\|g\|_{[\infty]} = \|M_g\| = \|\widetilde{T}\| = \|T\| \le 1$$

Si $f \in \mathcal{H}$ se cumple que $Tf = P_{\mathcal{H}}\widetilde{T}f = P_{\mathcal{H}}gf$ y para $f \in \mathcal{F}_n$ $Af = AP_{\mathcal{F}_n}f = Tf = P_{\mathcal{H}}gf$. Luego, se ha probado que

$$Af = P_{\mathcal{F}_n}Af = P_{\mathcal{F}_n}gf.$$

Se observa que

$$g = M_g\widetilde{\tau}_0 = \widetilde{T}\widetilde{\tau}_0 = T\widetilde{\tau}_0 = AP_{\mathcal{F}_n}\widetilde{\tau}_0 = A\widetilde{\tau}_0 = P_{\mathcal{F}_n}M_g\widetilde{\tau}_0.$$

Por lo tanto, para $j = 0, \ldots, n$

$$\begin{aligned}[g, \widetilde{\tau}_j] &= [A\widetilde{\tau}_0, \widetilde{\tau}_j] \\ &= c_j\end{aligned}$$

$\square$

Bibliografía

[1] R. Adams & J. Fournier. *Sobolev spaces.* 2nd ed. Pure and Applied Mathematics 140. New York, Academic Press. xiii. (2003).

[2] J. Agler. *Nevanlinna-Pick interpolation on Sobolev space.* Proc. Am. Math. Soc. 108, No.2, (1990) 341-351. Citado en página(s): 1, 2, 37

[3] R. Arocena. *Unitary extensions of isometries and interpolation problems: dilation and lifting theorems.* Publicaciones Matemáticas del Uruguay 22 (1995). Citado en página(s): 14

[4] N. Aronszajn. *Theory of reproducing kernels.* Trans. Am. Math. Soc. 68, 337-404 (1950). Citado en página(s): 2

[5] R. Bruzual & M. Domínguez. *Equivalence between the dilation and lifting properties of an ordered group through multiplicative families of isometries. A version of the commutant lifting theorem on some lexicographic groups.* Integral Equations Oper. Theory 40 1-15 (2001).

[6] G. Choquet. *Lectures on analysis. Vol. I: Integration and topological vector spaces.* Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart. 3rd printing. Mathematics Lecture Note Series. 24 (1976).

[7] G. Choquet. *Lectures on analysis. Vol. II: Representation theory.* Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart. 3rd printing. Mathematics Lecture Note Series. 25. (1976).

[8] G. Choquet. *Lectures on analysis. Vol. III: Infinite dimensional measures and problem solutions.* Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart. 3rd printing. Mathematics Lecture Note Series. 26. (1976).

[9] M. Cotlar. *Núcleos Invariantes y Teoremas de Dilatación, Parametrización y Predicción.* Asociación Matemática Venezolana, Boletín, Vol. I, N°1, (1994).

[10] M. Cotlar, R. Bruzual, P. Alegría, M. Domínguez, J. Giménez & S. Marcantognini. *Extensión y Representación de Formas Invariantes en la Teoría de Interpolación, Predicción y Dilatación.* Tercera Escuela Venezolana de Matemáticas, 1990.

[11] M. Cotlar & R. Cignoli. *An introduction to functional analysis.* North Holland, (1974).

[12] M. Cotlar & C. Sadosky. *Nehari and Nevanlinna-Pick problems and holomorphic extensions in the polydisk in terms of restricted BMO.* J. Funct. Anal. 124, No.1, 205-210 (1994).

[13] M. Domínguez. *Interpolation and prediction problems for connected compact abelian groups.* Integral Equations Operator Theory 40, 2001, 212-230.

[14] R. Douglas. *Banach algebra techniques in operator theory.* Academic press (1972).

[15] H. Dym & H.P. McKean. *Fourier Series and Integrals*. Academic Press, 1972. Citado en página(s): 12

[16] J. Garnett. *Bounded analytic functions*. Academic Press, 1981.

[17] C. Foias & A. Frazho. *The commutant lifting approach to interpolation problems*. Operator Theory: Advances and Applications, 44. Basel. Birkhäuser. xxiii, 1990. Citado en página(s): 3

[18] Z. Nehari. *On bounded bilinear forms*. Annals of Mathematics, 65-1, 1957, pp. 153 - 162.

[19] R. Nevanlinna. *Uber beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen*. Ann. Acad. Sc. Fennicae A 13, Nr. 1, 1-71 (1920).

[20] N. Nikol'skii. *Treatise on the Shift Operator*. Springer-Verlag, 1986. Citado en página(s): 1, 3

[21] G. Pick. *Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden*. Math. Ann. 77, 7-23 (1916). Citado en página(s): 12

[22] R. Ramírez. *El teorema de Nehari y el teorema de Kronecker*. Trabajo Especial de Grado (Licenciatura en Matemática) dirigido por la Dra. Marisela Domínguez. Universidad Central de Venezuela (2009). Citado en página(s): 1, 3, 4

[23] H.L. Royden. *Real Analysis*, Collier Macmillan International Editions, 1968. Citado en página(s): 12

[24] W. Rudin. *Fourier analysis on groups*. Interscience, 1962.

[25] D. Sarason. *Generalized interpolation in* H^{∞}. Trans. Amer. Math. Soc., 127, 1967, pp. 179 - 203.

[26] L. Schwartz. *Théorie des distributions. (Distribution theory). (Théorie des distributions.)* Nouveau tirage. Paris: Hermann. xii, (1998). Citado en página(s): 1

[27] B. Sz.-Nagy and C. Foias. *Dilatation des commutants d'operateurs*. C. R. Acad. Sci. Paris, Serie A, 266, 1968, pp. 493-495.

[28] B. Sz.-Nagy and C. Foias. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*. North Holland Publishing Co. 1970.