UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

MARCOS EN ESPACIOS DE KREIN QUE SURGEN DE UNA MÉTRICA Y PROPIEDADES DE TRANSFERENCIA

Autor: Msc. Osmin Ferrer Villar
Tutora: Dra. Marisela Domínguez.

Tesis Doctoral presentada ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Doctor en Ciencias, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela
Octubre de 2014

Resumen

Se establece una definición de marcos en espacios de Krein y se da una caracterización completa comparándolos con marcos en el espacio de Hilbert asociado. Las herramientas básicas de la teoría de marcos se describen en el formalismo de espacios de Krein. Se explica cómo transferir un marco para espacios de Hilbert a espacios de Krein, dados por una W-métrica, donde el operador de Gram W no es necesariamente regular y posiblemente no acotado. Por último se estudian algunas propiedades de marcos de subespacios de estos espacios de métrica indefinida.

Abstract

A definition of frames in Krein spaces is stated and a complete characterization is given by comparing them to frames in the associated Hilbert space. The basic tools of frame theory are described in the formalism of Krein spaces. It is explained how to transfer a frame for Hilbert spaces to Krein spaces given by a W-metric, where the Gram operator W is not necessarily regular and possibly unbounded. Finally we present some properties of frames of subspaces of these particular indefinite metric spaces.

Dedicatoria

A mi madre Rosa María a mis hijos Kandy y Xavy a mi esposa Julia Susana a mis hermanos, hermanas, sobrinos y sobrinas.

Agradecimientos

Son tantas las personas que debo agradecerles, por lo tanto me es imposible nombrarlas individualmente aquí.

En especial agradezco a Dios por brindarme grandes bendiciones y darme la fortaleza para conseguir este nuevo logro.

Un especial reconocimiento a mi tutora la Dra. Marisela Domínguez no solo por sus orientaciones, sino también por todo el impulso, comprensión y ayuda, sin los cuales no hubiese tenido la opción de seguir avanzando académicamente.

Agradezco al Dr. Ramón Bruzual que desde mi primer día en la UCV me acogió de buena manera, además porque junto con mi tutora son para mí un ejemplo de orden, disciplina y trabajo.

A mi amada esposa Julia Susana por su fortaleza para asumir y resolver problemas siempre con actitud positiva, por hacer de madre y padre de mis amados hijos Kandy y Xavy en momentos difíciles.

Agradezco a mi hermano Carlos y demás hermanos por su apoyo incondicional en todo momento.

Al personal docente y administrativo del Postgrado en Matemáticas de la Facultad de Ciencias, de la Universidad Central de Venezuela y a mis compañeros del grupo de Análisis de la UCV por su acogida, en especial a mi amigo Ángel Padilla por su apoyo incondicional.

También agradezco a mis primas y tía en Venezuela por todo lo que significan en este nuevo logro.

Índice general

Introducción

La teoría de marcos para espacios de Hilbert se origina en 1952 con el artículo de Duffin y Schaeffer [**12**]. Casi treinta años después, en 1986, fue desarrollada por Daubechies, Grossmann y Meyer [**10**], ellos usaron marcos para encontrar expansiones en series de funciones en $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ similares a la expansión en series que se hace usando bases ortonormales.

Los marcos pueden pensarse como bases sobre-completas, es decir, en las que sobran elementos. Su sobre-completitud las hace más flexibles que las bases ortonormales, pues no se requiere la independencia lineal y la ortogonalidad entre elementos. Introducciones a la teoría de marcos y bases pueden verse en [**8, 11**]. Además en [**15**] se consideran en detalle marcos en subespacios.

Los marcos han resultado ser una herramienta poderosa en procesamiento de señales y análisis de ondículas [**15**] (ver también [**5, 9, 17, 19**]).

Vamos a considerar la teoría de marcos y la teoría de marcos de subespacios en espacios de Krein y espacios de Hilbert con W-métrica. Para eso nos basaremos en el libros de Azizov & Iokhvidov [**2**], en el libro de Christensen [**7**] y en el artículo de Casazza & Christensen [**5**].

Es natural que se quiera tener las mismas herramientas disponibles para espacios de Krein. Por supuesto que esto puede hacerse sin ningún cambio considerando el espacio de Hilbert asociado. Sin embargo hemos preferido dar un enfoque más directo tomando en cuenta la estructura de los espacios de Krein, evitando así el cambio entre espacios de Krein y espacios de Hilbert. Ideas similares han sido desarrolladas independientemente en [**16**] y en [**19**].

Los resultados han sido distribuidos en este trabajo de la siguiente manera, en los dos primeros capítulos se introducen nociones preliminares, básicas para la comprensión de los capítulos posteriores. En el Capítulo 1 presentamos los marcos en espacios de Hilbert y en el Capítulo 2 presentamos los espacios de métrica indefinida.

En el Capítulo 3 se presenta nuestro enfoque a la teoría de marcos en espacios de Krein. Ahí se da la definición de marcos en espacios de Krein reemplazando el producto interno definido positivo en la definición de un marco para un espacio de Hilbert con un producto interno (posiblemente) indefinido. Como era de esperar, se logra probar que la teoría de marcos para un espacio Krein y la teoría de marcos para el espacio de Hilbert asociado son equivalentes, esto se presenta en el Teorema 3.3.

Luego reformulamos las herramientas básicas de la teoría de marcos en el lenguaje del espacio de Krein. Por ejemplo, al operador premarco se le permite tener un espacio Krein como su dominio. Nuestras definiciones son tales que el operador marco (Definición 3.5) y el Teorema de Descomposición de Marcos (Teorema 3.6) son análogos a las versiones del espacio de Hilbert con el producto interior definido positivo sustituido por el producto interno del espacio Krein.

Además, discutimos los marcos duales canónicos (Proposición 3.8), marcos ajustados y su relación con las bases J-ortonormalizadas (Proposición 3.9), y la relación entre los marcos y las proyecciones ortogonales que conmutan con la simetría fundamental J (Teorema 3.11).

Luego, en el Capítulo 4, aplicamos nuestra teoría a los espacios de Krein dados por un operador de Gram W no regular y/o no acotado actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. La observación fundamental (Proposición 4.2) es que, cuando el operador de Gram W es no regular o no acotado, un marco para $\mathcal{H}$ nunca puede ser un marco para el espacio de Krein $\mathcal{H}_W$ construido a partir de W. Sin embargo, se muestra cómo transferir cualquier marco para el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ a un marco para el espacio de Krein $\mathcal{H}_W$. La idea básica es la construcción de un operador unitario entre $\mathcal{H}_W$ y $\mathcal{H}$ a partir de la raíz cuadrada $\sqrt{|W|}$.

Para una comprensión mayor, distinguimos entre el caso en que W es acotado (Proposición 4.3) y el caso en que W es no-acotado pero el cero no pertenece al espectro de W (Teorema 4.4). La situación general es tratada en el Teorema 4.5. Note que estos resultados también se aplican a operadores de Gram positivos, W, cuando $\mathcal{H}_W$ es en realidad un espacio de Hilbert.

Finalmente, en el Capítulo 5 estudiamos algunas propiedades de marcos de subespacios en estos espacios de métrica indefinida.

Los resultados de los Capítulos 3 y 4 aparecieron en la publicación [**13**] y los del Capítulo 5 aparecieron en [**1**].

CAPíTULO 1

Marcos en espacios de Hilbert

En este capítulo se dan algunas propiedades básicas de marcos en espacios de Hilbert incluyendo resultados importantes sin demostración, éstas se pueden hallar [**7**], [**9**] y [**12**].

1. Propiedades básicas

De ahora en adelante, $\mathcal{H}$ representará un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Como es usual $\ell_2(\mathbb{N})$ será el espacio dado por

$$\ell_2(\mathbb{N}) \quad = \quad \left\{ x = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} / \ c_n \in \mathbb{C} \text{ y } \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty \right\}.$$

Definición 1.1. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ es llamada un *marco* para $\mathcal{H}$ si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{H}. \tag{1.1}$$

Estamos interesados principalmente en espacios de dimensión infinita, y debido a que siempre se puede completar un marco finito con elementos cero, asumimos que el conjunto de índices es $\mathbb{N}$.

Los números A y B son llamados *cotas del marco.* Estas no son únicas, las cotas óptimas del marco son el mayor valor posible de A y el menor valor posible de B que satisfacen (1.1). Si sucede el caso en que $A = B$, es llamado *marco ajustado.* Si se deja de ser un marco cuando se remueve un elemento de la familia, entonces recibe el nombre de *marco exacto.*

En el caso que solo tenemos la cota superior, la familia es llamada *sucesión de Bessel* con cota Bessel B.

Definición 1.2. Dado un marco $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $\mathcal{H}$, se define el *operador pre-marco* mediante

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathcal{H}, \qquad T\left(\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n. \tag{1.2}$$

Observación 1.3. El operador T de la definición anterior es acotado ya que si $c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debido a la desigualdad de Bessel se tiene que

$$\begin{aligned}
\|Tc\| &= \sup_{\|y\|=1} |\langle Tc, y\rangle| = \sup_{\|y\|=1} \left| \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \langle x_n, y\rangle \right| \\
&\leq \sup_{\|y\|=1} \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n \langle x_n, y\rangle| \leq \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x_n, y\rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&= \|c\| \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle y, x_n\rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \|c\|\sqrt{B} \sup_{\|y\|=1} \|y\| \\
&= \|c\|\sqrt{B}.
\end{aligned}$$

Por lo cual $\|T\| \leq \sqrt{B}$.

Proposición 1.4. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un marco para $\mathcal{H}$. El operador adjunto del operador pre-marco está dado por*

$$T^* : \mathcal{H} \to \ell^2(\mathbb{N}), \quad T^*x = \{\langle x, x_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}} . \tag{1.3}$$

Definición 1.5. El operador lineal

$$S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \qquad Sx = TT^*x \tag{1.4}$$

es llamado el *operador marco*.

Adicionalmente usando (1.2) y (1.3) se obtiene la siguiente expresión para S

$$Sx = TT^*x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n\rangle x_n. \tag{1.5}$$

Observación 1.6. El operador marco S es acotado, y autoadjunto. En efecto,

$$\|S\| = \|TT^*\| = \|T\|^2 \leq B$$

y se satisface que $S^* = (TT^*)^* = TT^* = S$.

Definición 1.7. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ marcos para el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, tales que

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, y_n\rangle\, x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n\rangle\, y_n \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}. \tag{1.6}$$

Cuando esto ocurre se dice que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *marco dual* de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Se usará Id para referirse al operador identidad en $\mathcal{H}$.

Teorema 1.8. *El operador marco S satisface las siguientes propiedades:*

(i) $A\mathrm{Id} \leq S^{-1} \leq B\mathrm{Id}$.
(ii) *S es invertible y satisface* $B^{-1}\mathrm{Id} \leq S^{-1} \leq A^{-1}\mathrm{Id}$.
(iii) $\{S^{-1}x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un marco con cotas* B^{-1}, A^{-1}*, llamado el marco dual canónico de* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

TEOREMA 1.9 (**Descomposición de marcos**). *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un marco para el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$*. Entonces se satisface*

$$x = SS^{-1}x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, S^{-1}x_n\rangle x_n, \quad \textit{para todo}\, x \in \mathcal{H}.$$

También puede ser expresado de la forma

$$x = S^{-1}Sx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n\rangle S^{-1}x_n, \quad \textit{para todo}\, x \in \mathcal{H}.$$

TEOREMA 1.10. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un marco ajustado para el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *con cotas* $A = B = 1$*. Si* $\|x_n\| = 1$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una base ortonormal para* $\mathcal{H}$.

LEMA 1.11. *Supongamos que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en un subespacio denso* $V \subset \mathcal{H}$ *tal que existen* $A, B > 0$ *que satisfacen*

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \quad \textit{para todo } x \in V.$$

Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un marco para* $\mathcal{H}$ *con cotas* A, B.

El siguiente resultado es una caracterización de los marcos en espacios de Hilbert.

TEOREMA 1.12. [**7**] *Una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ *es un marco para el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *si y sólo si el operador lineal*

$$T : \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathcal{H}, \quad \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n.$$

está bien definido y es sobreyectivo.

OBSERVACIÓN 1.13.

(a) En un espacio de Banach X, a veces, un subconjunto $\{\phi_i\}_{i\in J}$ es llamado sistema. Se dice que el sistema es completo si cada elemento en X puede ser aproximado arbitrariamente bien en norma por combinaciones lineales finitas de elementos de $\{\phi_i\}_{i\in J}$. Un sistema completo es llamado sobre-completo si sobran elementos, más precisamente si existe $i_o \in J$ tal que $\{\phi_i\}_{i\in J\setminus\{i_o\}}$ sigue siendo completo. En áreas como procesamiento de señales y aproximación de funciones la sobre-completitud puede ayudar a conseguir una descomposición más estable, más robusta o más compacta que usando bases [**3**]. Marcos sobre-completos son ampliamente usados en matemáticas, ciencias de la computación y estadística.

(b) Se puede explicar intuitivamente por qué los marcos son importantes. Supongamos que se quiere transmitir la señal x perteneciendo a un espacio con producto escalar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, de un transmisor $\mathcal{A} \subseteq V$ a un receptor $\mathcal{R} \subseteq V$. Si ambos tienen conocimiento de un marco $\{x_n\}_{n=1}^m$ para V, la transmisión puede hacerse de la siguiente manera:

Si $\mathcal{A}$ envía los coeficientes $\{\langle x, S^{-1}x_n\rangle\}_{n=1}^m$, entonces el receptor $\mathcal{R}$ basado en estos coeficientes puede reconstruir la señal x utilizando el teorema de descomposición de marcos (Teorema 1.9). Supongamos ahora que $\mathcal{R}$ no recibe una señal muy buena. Es decir, se tiene una perturbación de los coeficientes, y los nuevos coeficientes son

$$\{\langle x, S^{-1}x_n\rangle + c_n\}_{n=1}^m.$$

Por lo cual, el receptor $\mathcal{R}$ basado en estos nuevos coeficientes tendría que la señal emitida fue:

$$\sum_{n=1}^m \big(\langle x, S^{-1}x_n\rangle + c_n\big)\, x_n = \sum_{n=1}^m \langle x, S^{-1}x_n\rangle x_n + \sum_{n=1}^m c_n x_n = x + \sum_{n=1}^m c_n x_n$$

implicando ello que se difiere de la señal correcta x por una perturbación $\sum_{n=1}^m c_n x_n$. Si $\{x_n\}_{n=1}^m$ es sobre-completa el operador pre-marco podría tener un kernel no trivial, implicando que la parte de la perturbación agregada podría ser cero. Sin embargo esto no sucede si $\{x_n\}_{n=1}^m$ es una base ortonormal, en tal caso,

$$\left\|\sum_{n=1}^m c_n x_n\right\| = \sum_{n=1}^m |c_n|^2$$

así cada contribución de la perturbación empeora la reconstrucción.

Luego debemos ver que dado $x \in V$ los coeficientes del marco $\{\langle x, S^{-1}x_n\rangle\}_{n=1}^m$ tienen norma ℓ_2-minimal a lo largo de todas las sucesiones $\{d_n\}_{n=1}^m$ para los cuales tengamos que

$$x = \sum_{n=1}^m d_n x_n.$$

2. Marcos de Gabor para $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$

Consideremos los siguientes operadores lineales sobre $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

(i) La traslación por $a \in \mathbb{R}$, $\quad T_a : \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, $\quad (T_a f)(x) = f(x-a)$,
(ii) La modulación por $b \in \mathbb{R}$, $\quad E_b : \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, $\quad (E_b f)(x) = e^{2\pi i b x} f(x)$.

Definición 1.14. Un marco de Gabor es un marco para $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ de la forma $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$, donde $a, b > 0$ y $g \in \mathcal{H}$ es una función fija.

A la función g se le llama *función ventana o el generador*. Explícitamente,

$$E_{mb}T_{na}g(x) = e^{2\pi imbx}g(x-na).$$

Los siguientes resultados dados pueden ser encontrados en [**7**].

LEMA 1.15. *Sean $f, g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, y $a, b > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, entonces la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x-na)\overline{g\left(x-na-\frac{k}{b}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

converge absolutamente para casi toda $x \in \mathbb{R}$. Dicha serie define una función de período a. La restricción de (1.7) al intervalo $[0, a]$ pertenece a $L_1(0, a)$.

2.1. Condiciones necesarias para que una familia sea un marco de Gabor.

A continuación veremos cómo obtener marcos de Gabor $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ para $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

DEFINICIÓN 1.16. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una familia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$ es llamada *sucesión de Riesz* si existen constantes $0 < c \leq C < +\infty$ que satisfacen:

$$c\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2\right) \leq \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2 \leq C\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2\right) \tag{1.8}$$

para toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$. Una sucesión de Riesz es una *base de Riesz* si el espacio generado por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es todo $\mathcal{H}$, abreviadamente

$$\overline{\operatorname{gen}\{\, x_n :\ n \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{H}. \tag{1.9}$$

Uno de los resultados fundamentales de la teoría de marcos establece que el producto ab decide si es posible que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un marco para $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$:

TEOREMA 1.17. *Sea $g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ y $a, b > 0$ son números dados. Entonces lo siguiente se cumple:*

(i) *Si $ab > 1$ entonces $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ no es un marco para $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.*
(ii) *Sea $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ un marco, se tiene que: $ab = 1$ si y sólo si $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz.*

Esto es, sólo es posible para $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ ser un marco si $ab \leq 1$, y es un marco sobrecompleto si $ab < 1$.

La siguiente proposición da una condición necesaria para que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un marco para $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, ésta sólo depende de la función g y su traslación por un parámetro a. La siguiente función se usa frecuentemente. Sea

$$G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2 . \tag{1.10}$$

PROPOSICIÓN 1.18. *Sea $g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, $a, b > 0$ son números dados, supongamos que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco con cotas $A, B > 0$ entonces*

$$bA \leq G(x) \leq bB \quad \textit{c.t.p en } \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Más precisamente, si la condición de cota superior en la desigualdad (1.11) no se satisface, entonces $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ no es una sucesión de Bessel; si la condición de cota inferior en (1.11) no se satisface, entonces $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ no satisface la condición de cota inferior de marco.

2.2. Condiciones suficientes para que una familia sea un marco de Gabor.

Las condiciones suficientes para que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ sea un marco para $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ se conocen desde 1988.

TEOREMA 1.19. *Sea $g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ y $a, b > 0$ son números dados, supongamos que existen $A, B > 0$ tales que*

$$A \leq G(x) \leq B \quad \textit{c.t.p. en } \mathbb{R} \tag{1.12}$$

y

$$\sum_{k\neq 0} \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}g \; T_{na+\frac{k}{b}}\overline{g} \right\|_{\infty} < A, \tag{1.13}$$

entonces $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco de Gabor para $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

Para demostrar que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ es un marco, se necesita estimar la serie

$$\sum_{m,n\in\mathbb{N}} |\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle|^2 .$$

El siguiente lema da una fórmula para $\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle$ en términos de coeficientes de Fourier de una función $\frac{1}{b}$- periódica.

LEMA 1.20. *Sean $f, g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ y $a, b > 0$ números dados. Dado $n \in \mathbb{Z}$ se considera la función $F_n \in L(0, \frac{1}{b})$ definida por*

$$F_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(x - \frac{k}{b}\right) \overline{g\left(x - na - \frac{k}{b}\right)}$$

entonces, para cualquier $m \in \mathbb{Z}$,

$$\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle = \int_0^{\frac{1}{b}} F_n(x)e^{-2\pi imbx}dx,$$

en particular, el m*-ésimo coeficiente de Fourier para la función* F_n *con respecto a la base ortonormal* $\left\{\sqrt{b}e^{2\pi imbx}\right\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *para* $\mathbb{L}_2(0, \frac{1}{b})$ *es*

$$c_m = \sqrt{b}\,\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle\,.$$

A continuación se calcula la serie $\sum_{m,n\in\mathbb{N}} |\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle|^2$ usando la función G dada en (1.10) y expresiones como la de (1.7). Este lema es una herramienta indispensable para saber cuando $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ es un marco.

Lema 1.21. *Supongamos que* f *es una función acotada y medible con soporte compacto y que la función* G *definida en (1.11) es acotada. Entonces*

$$\begin{aligned}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |\langle f, E_{mb}T_{na}g\rangle|^2 \;=\; & \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, G(x)dx \frac{1}{b}\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} f\left(x-\frac{k}{b}\right) \\ & \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g\left(x-na-\frac{k}{b}\right)}dx \end{aligned} \tag{1.14}$$

Los lemas anteriores nos ayudan a mostrar el siguiente resultado.

Teorema 1.22. *Sea* $g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$*,* $a, b > 0$ *y supongamos que*

$$B := \frac{1}{b}\sup_{x\in[0,a]}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g\left(x-na-\frac{k}{b}\right)}\right| \leq \infty \tag{1.15}$$

entonces tenemos que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *es una sucesión de Bessel con cota del marco* B*. Si también*

$$A := \frac{1}{b}\inf_{x\in[0,a]}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(x-na)|^2 - \sum_{k\neq 0}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g\left(x-na-\frac{k}{b}\right)}\right|\right] > 0 \tag{1.16}$$

entonces $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *es un marco para* $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ *con cotas* A, B*.*

Ejemplo 1.23.

(i) La función $g = \chi_{[0,1)}$ genera un marco de Gabor para todo $0 < a$, $b \leq 1$. Ya que se sigue inmediatamente que la función G dada en (1.10) es una función simple para todos los valores de $0 < a$, $b \leq 1$. Y por lo tanto satisface las condiciones del Teorema 1.19.

(ii) Sean $a = b = 1$ y definamos la función

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{si } x \in (0,1], \\ \frac{x}{2}, & \text{si } x \in (1,2], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.17}$$

Para $n,\ k \in \mathbb{Z}$ consideremos la función

$$x \longmapsto g(x-n)g(x-n-k)$$

para $x \in (0,1]$. Dado que g es de soporte compacto, entonces ésta es no cero si $n \in \{-1,\ 0\}$. Para $n = -1$ puede ser no cero para $k \in \{0,\ 1\}$, y para $n = 0$ puede ser no cero para $k \in \{-1,\ 0\}$. Por lo tanto

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-n)g(x-n-k) = \begin{cases} g(x)g(x+1), & \text{si } k = -1, \\ g(x)^2 + g(x+1)^2, & \text{si } k = 0, \\ g(x+1)g(x), & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{2}, & \text{si } k = -1, \\ \dfrac{5(x+1)^2}{4}, & \text{si } k = 0, \\ \dfrac{(x+1)^2}{2}, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así

$$G(x) = \frac{5(x+1)^2}{4}, \quad x \in (0,1],$$

por lo tanto se tiene que

$$\sum_{k\neq 0} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-n)g(x-n-k) \right| = (1+x)^2, \quad x \in (0,1],$$

entonces el Teorema 1.22 nos dice que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ es un marco de Gabor para $L_2(\mathbb{R})$ con cotas $A = \frac{1}{4},\ B = 9$ (ver [**7**]).

2.3. Marcos de subespacios en espacios de Hilbert.

A continuación consideremos los marcos de subespacios en espacios de Hilbert. Ver los detalles en [**5**]. A partir de ahora consideramos I como el conjunto de índices, y definimos

$$\ell_+^\infty(I) = \{(x_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(I) : x_i \in \mathbb{R}_+, \quad \text{para todo } i \in I\}. \tag{1.18}$$

DEFINICIÓN 1.24 (*Marcos de subespacios*). Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|$. Una familia $\{V_i\}_{i\in I}$ de subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ se dice ser un *marco de subespacios* del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con respecto a $(x_i)_{i\in I} \in \ell_+^\infty(I)$ (denotado por $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$) si existen constantes $A, B > 0$ tal que

$$A\|y\|^2 \leq \sum_{i\in I} x_i^2 \left\|P_{V_i} y\right\|^2 \leq B\|y\|^2, \quad \text{para todo } y \in \mathcal{H}, \tag{1.19}$$

donde $P_{V_i} : \mathcal{H} \to V_i$ son proyectores ortogonales. Los números A y B son llamadas *cotas del marco*.

CAPíTULO 2

Espacios con métrica indefinida

En este capítulo se presentarán algunas definiciones y resultados en el ambiente de espacios de métrica indefinida que serán usados en el resto del trabajo.

DEFINICIÓN 2.1. Sea V un espacio vectorial, un *producto interno* en V, es una función $[\cdot,\cdot] : V \times V \to \mathbb{C}$ tal que:

(1) $[x+y,z] = [x,z] + [y,z]$ para todo $x,y,z \in V$.
(2) $[\alpha x,y] = \alpha\,[x,y]$ para todo $x,y \in V$.
(3) $[x,y] = \overline{[y,x]}$ para todo $x,y \in V$.

Al par $(V,[\cdot,\cdot])$ se le llama *espacio con producto interno* .

$(V,-[\cdot,\cdot])$ también es un espacio con producto interno, se le conoce como el *anti-espacio* de $(V,[\cdot,\cdot])$.

PROPOSICIÓN 2.2. *Si* $(V,[\cdot,\cdot])$ *es un espacio con producto interno entonces se cumple la propiedad de polarización, es decir, para todo* $x,y \in V$ *se tiene que*

$$[x,y] = \frac{1}{4}\,[x+y,x+y] - \frac{1}{4}\,[x-y,x-y] + \frac{i}{4}\,[x+iy,x+iy] - \frac{i}{4}\,[x-iy,x-iy]\,.$$

1. Vectores positivos, negativos y neutros con respecto a un producto interno

Como $[x,x] \in \mathbb{R}$ para todo $x \in V$, entonces la propiedad de tricotomía de los números reales garantiza que una y sólo una de las siguientes tres condiciones se cumple

$$[x,x] = \begin{cases} > 0 & \text{(en este caso se dice que } x \text{ es positivo)} \\ < 0 & \text{(en este caso se dice que } x \text{ es negativo)} \\ = 0 & \text{(en este caso se dice que } x \text{ es neutro)} \end{cases}$$

Puede ocurrir que x sea neutro aún cuando $x \neq 0$.

Las consideraciones anteriores nos llevan a distinguir los siguientes conjuntos

$$B^+ = \{x \in V : [x,x] \geq 0\} \qquad B^- = \{x \in V : [x,x] \leq 0\}$$

$$B^{++} = \{x \in V : [x,x] > 0 \text{ ó } x = 0\} \qquad B^{--} = \{x \in V : [x,x] < 0 \text{ ó } x = 0\}$$

$$\mathcal{N} = \{x \in V : [x,x] = 0\}$$

Note que $\mathcal{N} \neq \emptyset$, pues $0 \in \mathcal{N}$.

Observación 1.

(a) $B^{++} \subseteq B^+$. La prueba se obtiene usando que $x = 0$ implica $[x,x] = 0$.
(b) $B^{--} \subseteq B^-$. La prueba es análoga a la anterior.
(c) Puede ocurrir que exista $x \in B^+$ y sin embargo este $x \notin B^{++}$. Esto ocurre cuando existe $x \in V$, $x \neq 0$ tal que $[x,x] = 0$.
(d) $\mathcal{N} = B^+ \cap B^-$. Esto es consecuencia de que $[x,x] = 0$ si y sólo si $[x,x] \geq 0$ y $[x,x] \leq 0$.

Definición 2.3. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno. Se dice que

(a) $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con *producto interno indefinido* cuando posee tanto elementos positivos como elementos negativos. Es decir, existen $a, b \in V$ tales que $[a,a] > 0$ y $[b,b] < 0$.
(b) $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con *producto interno semidefinido* cuando no es indefinido.
(c) $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con *producto interno semidefinido positivo* cuando $[x,x] \geq 0$ para todo $x \in V$.
(d) $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con *producto interno semidefinido negativo* cuando $[x,x] \leq 0$ para todo $x \in V$.
(e) $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con *producto interno definido* cuando $x \in V$ y $[x,x] = 0$ implica $x = 0$.
(f) $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con *espacio con producto interno neutro* cuando $[x,x] = 0$ para todo $x \in V$.

Notemos que:

(a) El producto interno es indefinido si y sólo si $B^{++} \neq \{0\}$ y $B^{--} \neq \{0\}$.
(b) El producto interno es definido si y sólo si $B^{++} = \{0\}$ ó $B^{--} = \{0\}$.
(c) El producto interno es semidefinido positivo si y sólo si $B^{--} = \{0\}$.
(d) El producto interno es semidefinido negativo si y sólo si $B^{++} = \{0\}$.
(e) El producto interno es definido no posee elementos neutros no nulos.

Teorema 2.4. *Todo espacio con producto interno indefinido posee elementos neutros no nulos.*

Demostración. Sea $(V, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno indefinido. Entonces existen $a, b \in V$ tales que $[a, a] > 0$ y $[b, b] < 0$. Por lo tanto $[a, a]\,[b, b] < 0$, luego

$$-4\,[a, a]\,[b, b] \geq 0.$$

Consideremos la ecuación cuadrática para la variable x

$$[b, b]\,x^2 + 2\operatorname{Re}[a, b]\,x + [a, a] = 0. \tag{2.1}$$

Como $(2\operatorname{Re}[a, b])^2 \geq 0$ y $-4\,[a, a]\,[b, b] \geq 0$, entonces

$$(2\operatorname{Re}[a, b])^2 - 4\,[a, a]\,[b, b] \geq 0$$

y también se tiene que $[b, b] \neq 0$. Por lo tanto la ecuación (2.1) tiene solución en $\mathbb{R}$.

Sea $x_o \in \mathbb{R}$ solución de (2.1). Definamos $c = a + x_o b$, se probará que $[c, c] = 0$ y $c \neq 0$. En efecto

$$\begin{aligned}
[c, c] &= [a + x_o b, a + x_o b] \\
&= [a, a + x_o b] + [x_o b, a + x_o b] \\
&= [a, a] + [a, x_o b] + [x_o b, a] + [x_o b, x_o b] \\
&= [a, a] + \overline{x_o}\,[a, b] + x_o\,[b, a] + x_o \overline{x_o}\,[b, b]\,.
\end{aligned}$$

Usando que $x_o \in \mathbb{R}$ y que x_o es solución de (2.1) se obtiene

$$\begin{aligned}
[c, c] &= [a, a] + x_o\,[a, b] + x_o\,[b, a] + x_o x_o\,[b, b] \\
&= [a, a] + x_o\,[a, b] + x_o\overline{[a, b]} + x_o^2\,[b, b] \\
&= [a, a] + 2x_0 \operatorname{Re}[a, b] + x_o^2\,[b, b] \\
&= [b, b]\,x_o^2 + 2\operatorname{Re}[a, b]\,x_o + [a, a] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado si $c = 0$, se tendría $a = -x_o b$. Luego

$$0 < [a, a] = [-x_o b, -x_o b] = (-x_o)\overline{(-x_o)}\,[b, b] = x_o^2\,[b, b] \leq 0.$$

Esto es una contradicción.

Así que V posee elementos neutros no nulos. $\square$

Teorema 2.5 (Krein-Smulian). *Si el espacio con producto interno V posee al menos un vector positivo (negativo), entonces todo elemento de V es la suma de dos vectores positivos (negativos).*

La prueba de este resultado es sencilla y puede verse en el primer capítulo del libro de Bognar (ver [**4**], página 6).

2. Ortogonalidad

Definición 2.6. Sean V un espacio con producto interno y sean $x, y \in V$. Se dice que x, y son *vectores ortogonales* cuando $[x, y] = 0$. Esto se denota mediante $x \perp y$.

Definición 2.7. Sean V un espacio con producto interno y sean A y B subconjuntos de V. Se dice que A y B son *conjuntos ortogonales* cuando $a \perp b$ para todo $a \in A$, para todo $b \in B$. Esto se denota mediante $A \perp B$.

Notación 2.1. Cuando $[x, y] = 0$ para todo $y \in Y$ escribiremos $[x, Y] = 0$.

Proposición 2.8. *Si V es un espacio con producto interno neutro, entonces $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in V$.*

Demostración. Sean $x, y \in V$, entonces $[x, x] = 0$, $[y, y] = 0$ pues V es neutro.
Por la desigualdad de polarización se tiene que

$$[x, y] = \frac{1}{4}\,[x+y, x+y] - \frac{1}{4}\,[x-y, x-y] + \frac{i}{4}\,[x+iy, x+iy] - \frac{i}{4}\,[x-iy, x-iy] = 0.$$

□

Definición 2.9. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y E subconjunto de V, el *compañero ortogonal* de E, denotado por $(E^{\perp})$, es

$$E^{\perp} = \{x \in V : [x, E] = 0\}.$$

Proposición 2.10. *Si $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con producto interno y $W \subset V$, entonces*

(a) $W \subseteq W^{\perp\perp}$.
(b) $W^{\perp} \subseteq W^{\perp\perp\perp}$.

Demostración.
(a) Sean $x \in W$. Entonces $[x, y] = 0$ para todo $y \in W^{\perp}$. Luego $x \in W^{\perp\perp}$. Por lo tanto $W \subseteq W^{\perp\perp}$.
(b) Para probar $W^{\perp} \subseteq W^{\perp\perp\perp}$ basta aplicar la parte (a) al conjunto $W^{\perp}$. □

Definición 2.11. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal en V, la variedad lineal

$$W^o = W \cap W^\perp$$

se llama la *parte isotrópica* de W y sus elementos se llaman *vectores isotrópicos.*

Note que en cualquier caso este conjunto es no vacío:

$$W^o \neq \emptyset.$$

Esto se debe a que $0 \in W$ y $0 \in W^\perp$ luego $0 \in W \cap W^\perp = W^o$.

Definición 2.12. Si $W^o \neq \{0\}$ se dice que W es una variedad lineal *degenerada*. En caso contrario, se dice que W es una variedad lineal *no degenerada*.

Proposición 2.13. *Sean $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y $\mathcal{N}$ el conjunto de vectores neutros de V. Si W es una variedad lineal en V y W^o es la parte isotrópica de W entonces*

$$W^o \subseteq \mathcal{N}.$$

Demostración. Si $x \in W^o$ entonces $x \in W \cap W^\perp$, luego $[x,x] = 0$ y por lo tanto $x \in \mathcal{N}$. □

Proposición 2.14. *Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ espacio con producto interno semi-definido, entonces la parte isotrópica de V es el conjunto de vectores neutros. Es decir,*

$$V^o = \mathcal{N}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{N}$. Entonces $x \in V$ y se tiene que $[x,x] = 0$.

Para probar que $x \in V^\perp$ se toma $y \in V$. Como el producto es semidefinido vale la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Por lo tanto se tiene que

$$0 \leq |\,[x,y]\,|^2 \leq [x,x]\,[y,y] = 0.$$

De donde $[x,y] = 0$. Luego $x \in V^\perp$.

Por lo tanto $x \in V \cap V^\perp = V^o$. Esto prueba que $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}^o$.

Como ya se vió en la Proposición 2.13, se tiene que $V^o \subseteq \mathcal{N}$, por lo tanto $\mathcal{N} = V^0$. □

Definición 2.15. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal de V. Sea $x \in V$, si x admite una representación como $x = y + z$, con $y \in W$ y $z \in W^\perp$, se dice que y es una *proyección ortogonal* de x sobre W.

PROPOSICIÓN 2.16. *Sea* $(V, [\cdot, \cdot])$ *un espacio con producto interno y* W *una variedad lineal en* V*. Si* $x \in V$ *y existen dos proyecciones ortogonales* y_1 *y* y_2 *de* x *sobre* W*, entonces estas difieren en un vector isotrópico.*

La prueba del resultado anterior se puede ver en [**14**].

DEFINICIÓN 2.17. Sea $(V, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal de V. Se dice que W es *orto-complementada* cuando todo $x \in V$ se puede escribir como $x = y + z$, con $y \in W$ y $z \in W^{\perp}$.

En este caso escribimos

$$V = cl\{W, W^{\perp}\} \qquad \text{ó} \qquad V = \bigvee\{W, W^{\perp}\}.$$

TEOREMA 2.18. *Sea* $(V, [\cdot, \cdot])$ *un espacio con producto interno y* W *una variedad lineal en* V*. Todo vector de* V *tiene una proyección sobre* W *si y sólo si* W *es orto-complementado. En particular, cuando* W *es no degenerado se tiene que todo vector de* V *tiene una única proyección sobre* W *si y sólo si* $W = W\,[\dot{+}]\,W^{\perp}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que W es orto-complementado, esto es $V = cl\{W, W^{\perp}\}$. Sea $x \in V$, entonces existen $y \in W$, $z \in W^{\perp}$ tales que $x = y + z$. Por lo tanto y es una proyección de x sobre W.

Supongamos que todo vector de V tiene una proyección sobre W. Si $x \in V$, entonces existen $y \in W$ y $z \in W^{\perp}$ tales que $x = y + z$, entonces $x \in cl\{W, W^{\perp}\}$. Por lo tanto $V \subseteq cl\{W, W^{\perp}\}$.

Es claro que $cl\{W, W^{\perp}\} \subseteq V$, por lo tanto $V = cl\{W, W^{\perp}\}$.

Si W es no degenerado entonces

$$W \cap W^{\perp} = W^0 = \{0\}.$$

Por lo tanto

$$cl\{W, W^{\perp}\} = W\,[\dot{+}]\,W^{\perp}.$$

□

DEFINICIÓN 2.19. P es un *proyector ortogonal* en $(V, [\cdot, \cdot])$ si su dominio es V, P es isométrico y $P^2 = P$

OBSERVACIÓN 2. Si $(V, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal en V, tal que W es ortocomplementado y no degenerado, entonces todo vector de V tiene una única proyección sobre W. La aplicación $P_W : V \to W$ dada por

$$P_W(x) = y$$

donde y es la proyección ortogonal de x sobre W está bien definida y es lineal. Además es fácil ver que es un proyector ortogonal.

TEOREMA 2.20. *Si P es un proyector ortogonal en $(V, [\cdot,\cdot])$, entonces el rango de P es ortocomplementado y para cada $x \in V$, P_x es la proyección del rango de P sobre W. Si además W es no degenerado y ortocomplementado, entonces P_W es un proyector ortogonal y* $\mathrm{Ran}(P) = W$.

La prueba del resultado anterior se puede ver en [**14**].

3. Descomposición fundamental

DEFINICIÓN 2.21. Decimos que $(V, [\cdot,\cdot])$ es *descomponible* si admite una representación de la forma

$$V = V^0 \,[\dot{+}]\, V^+ \,[\dot{+}]\, V^-, \qquad V^+ \subseteq B^{++}, \qquad V^- \subseteq B^{--},$$

donde V^-, V^+ son variedades lineales y V^0 es la parte isotrópica de V. Toda descomposición como la anterior recibe el nombre de *descomposición fundamental.*

Sean $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y $\mathcal{W}$ un subconjunto de$V$. Si

$$V = \mathcal{W}^0 \,[\dot{+}]\, \mathcal{W}^+ \,[\dot{+}]\, \mathcal{W}^- \qquad \text{con} \qquad \mathcal{W}^+ \subseteq B^{++}, \quad \mathcal{W}^- \subseteq B^{--} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{W}^0 \subseteq \mathcal{W}$$

entonces $\mathcal{W}^0 = V^0$.

PROPOSICIÓN 2.22. *Toda descomposición fundamental de un espacio con producto interno indefinido, descomponible y no degenerado $(V, [\cdot,\cdot])$ es de la forma*

$$V = V^+ \,[\dot{+}]\, V^- \qquad \textit{con} \qquad V^+ \subseteq B^{++}, \qquad V^- \subseteq B^{--}.$$

OBSERVACIÓN 3. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido, descomponible y no degenerado tal que

$$V = V^+ \,[\dot{+}]\, V^- \qquad \text{con} \qquad V^+ \subseteq B^{++}, \quad V^- \subseteq B^{--}$$

entonces los proyectores $P_\pm : V \to V^\pm$ dados por

$$P_\pm(x) = x^\pm \tag{2.2}$$

están bien definidos y son proyectores ortogonales.

DEFINICIÓN 2.23. Los operadores $P_\pm : V \to V^\pm$ de la observación anterior se llaman *proyectores fundamentales* y

$$J = P_+ - P_-$$

se llama *simetría fundamental.*

Algunas propiedades de J son:

(i) $J^2 = I$.

En efecto, si $x \in V$, entonces

$$\begin{aligned} JJx &= JJ\left(x^+ + x^-\right) = J\left(x^+ - x^-\right) = J\left(x^+ + \left(-x^-\right)\right) = x^+ - \left(-x^-\right) \\ &= \left(x^+ + x^-\right) = x = I\left(x\right) \end{aligned}$$

(ii) J es simétrico.

En efecto,

$$\begin{aligned} [J(x), y] &= \left[x^+ - x^-, y^+ + y^-\right] = \left[x^+, y^+\right] + \left[x^+, y^-\right] + \left[-x^+, y^+\right] + \left[-x^-, y^-\right] \\ &= \left[x^+, y^+\right] - \left[x^-, y^-\right] = \left[x^+, y^+\right] + 0 + 0 - \left[x^-, y^-\right] \\ &= \left[x^+, y^+\right] + \left[x^+, -y^-\right] + \left[x^-, y^+\right] - \left[x^-, y^-\right] \\ &= \left[x^+, y^+\right] + \left[x^+, -y^-\right] + \left[x^-, y^+\right] + \left[x^-, -y^-\right] \\ &= \left[x^+, y^+ - y^-\right] + \left[x^-, y^+ - y^-\right] = \left[x^+ + x^-, y^+ - y^-\right] = [x, J(y)] \end{aligned}$$

Sean $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y $[\cdot,\cdot]_J =: V \times V \to \mathbb{C}$ dada por

$$[x, y]_J = [J(x), y]$$

Observación 4. J es J-isométrico.
En efecto,

$$[J(x), J(y)]_J = [JJ(x), J(y)] = [x, J(y)] = [J(x), y] = [x, y]_J$$

Entonces para todo $x, y \in V$ tenemos que

$$\begin{aligned} [x, y]_J &= [J(x), y] \\ &= \left[x^+ - x^-, y^+ + y^-\right] \\ &= \left[x^+, y^+ + y^-\right] - \left[x^-, y^+ + y^-\right] \\ &= \left[x^+, y^+\right] + \left[x^+, y^-\right] - \left[x^-, y^+\right] - \left[x^-, y^-\right] \\ &= \left[x^+, y^+\right] - \left[x^-, y^-\right] \geq 0. \end{aligned}$$

A la función $[\cdot,\cdot]_J : V \times V \to C$, se le llama *$J$-producto interno* y la norma inducida $\|\cdot\|_J$ se le llama *J-norma.*

Teorema 2.24. *Sean $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y J la simetría fundamental. Si $[\cdot,\cdot]_J : V \times V \to \mathbb{C}$ está dada por*

$$[x, y]_J = [J(x), y]$$

entonces

$$|\,[x,y]\,| \leq \|x\|_J\|y\|_J.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
|\,[x,y]\,| &= |\,\left[x^+,y\right] + \left[x^-,y\right]\,| \\
&\leq |\,\left[x^+,y^+\right]\,| + |\,\left[x^-,y^-\right]\,| \\
&\leq \left[x^+,x^+\right]^{\frac{1}{2}}\left[y^+,y^+\right]^{\frac{1}{2}} + (-\left[x^-,x^-\right])^{\frac{1}{2}}(-\left[y^-,y^-\right])^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\left[x^+,x^+\right]^{\frac{1}{2}} - \left[x^-,x^-\right]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left[y^+,y^+\right]^{\frac{1}{2}} - \left[y^-,y^-\right]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x\|_J\|y\|_J.
\end{aligned}$$

□

4. Espacios de Krein

DEFINICIÓN 2.25. Un espacio con producto interno $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ que admite una descomposición fundamental de la forma

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+\,[\dot{+}]\,\mathcal{K}^-, \qquad \mathcal{K}^+ \subseteq \beta^{++}, \qquad \mathcal{K}^- \subseteq \beta^{--}$$

con $(\mathcal{K}^+,[\cdot,\cdot])$ y $(\mathcal{K}^-,-[\cdot,\cdot])$ espacios de Hilbert, recibe el nombre de *espacio de Krein.*

Dado un espacio de Krein $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$, se le puede asociar un espacio de Hilbert $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot]_J)$. Por otro lado, si $(\mathcal{H},[\cdot,\cdot])$ es un espacio de Hilbert, entonces podemos verlo como un espacio de Krein de la forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}\,[\dot{+}]\,\{0\}.$$

TEOREMA 2.26. *Sea* $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ *un espacio de Krein y sean*

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+\,[\dot{+}]\,\mathcal{K}_1^-, \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_2^+\,[\dot{+}]\,\mathcal{K}_2^-, \qquad \text{con } \mathcal{K}_1^+,\mathcal{K}_2^+ \subseteq \beta^{++} \text{ y } \mathcal{K}_1^-,\mathcal{K}_2^- \subseteq \beta^{--}$$

dos descomposiciones fundamentales entonces:

$$\dim(\mathcal{K}_1^+) = \dim(\mathcal{K}_2^+) \qquad y \qquad \dim(\mathcal{K}_1^-) = \dim(\mathcal{K}_2^-).$$

Además si J_1 *y* J_2 *son las respectivas simetrías fundamentales entonces* $\|.\|_{J_1}$ *y* $\|.\|_{J_2}$*, son normas equivalentes.*

Este es un resultado clásico de espacios de Krein. La prueba puede verse en [**18**].

Tomando en cuenta el Teorema 2.26 tiene sentido hablar de

$$k^+ = \dim(\mathcal{K}^+) \qquad \text{y} \qquad k^- = \dim(\mathcal{K}^-)$$

DEFINICIÓN 2.27. Sea $k = \text{mín}\,\{k^+, k^-\}$. Cuando k es finito se dice que $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ es un *espacio de Pontryagin.*

Los conceptos topológicos tales como la convergencia y los operadores lineales acotados se refieren a la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_J$ en el espacio de Hilbert.

Los corchetes angulares $\langle\cdot,\cdot\rangle$ son reservados para denotar el producto interno positivo de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ dado.

Cuando no haya confusión, escribimos solo $\mathcal{K}$ para un espacio de Krein $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$, y $\mathcal{H}$ para un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

El símbolo $\mathfrak{l}_2(\mathbb{N})$ será usado cuando $\mathcal{K} = \ell_2(\mathbb{N})$ es visto solo como un espacio vectorial complejo.

Una base J-ortonormal es una familia completa $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ tales que $[e_n, e_m] = 0$ para $n \neq m$ y $|[e_n, e_n]| = 1$.

DEFINICIÓN 2.28. Un subespacio $V \subset \mathcal{K}$ es llamado *uniformemente J-positivo* (resp. *uniformemente J-negativo*) si existe $\varepsilon > 0$ tal que $[v,v] \geq \varepsilon\|v\|_J^2$ (resp. $-[v,v] \geq \varepsilon\|v\|_J^2$) para todo $v \in V$.

5. Operadores en espacios de Krein

Sean $(\mathcal{K}_1, [\cdot,\cdot]_1$ y $(\mathcal{K}_2, [\cdot,\cdot]_2)$ espacios de Krein.

Dado un operador lineal acotado (es decir, continuo) $T : (\mathcal{K}_1, [\cdot,\cdot]_1) \to (\mathcal{K}_2, [\cdot,\cdot]_2)$, el *adjunto* del operador T es el único operador lineal $T^{[*]} : (\mathcal{K}_2, [\cdot,\cdot]_2) \to (\mathcal{K}_1, [\cdot,\cdot]_1)$ tal que

$$[T^{[*]}h, k]_1 = [h, Tk]_2 \quad \text{para todo} \;\; k \in \mathcal{K}_1, \;\; h \in \mathcal{K}_2.$$

Es importante resaltar que siempre se toma con respecto a los productos internos especificados.

Un operador T en un espacio de Krein es auto-adjunto cuando $T^{[*]} = T$.

El operador $J : (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]) \to (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ es autoadjunto. Lo mismo pasa con el operador $J : (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J) \to (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$.

Por otro lado, el operador identidad

$$I_J : (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]) \to (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J), \qquad I_J k = k, \tag{2.3}$$

tiene por adjunto al operador $J : (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J) \to (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ ya que

$$[I_J k, h]_J = [k, h]_J = [k, Jh] \text{ para todo } h, k \in \mathcal{K}.$$

DEFINICIÓN 2.29. Un operador autoadjunto $A = A^*$ sobre $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ es llamado *uniformemente positivo*, si $[k, Ak] \geq \varepsilon[k, k]_J$ para una constante adecuada $\varepsilon > 0$ y todo $k \in \mathcal{K}$. Equivalentemente, ya que $[k, Ak] = [k, JAk]_J$, tenemos $JA \geq \varepsilon$ sobre el espacio de Hilbert $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$.

Como consecuencia, un operador uniformemente positivo tiene un inverso acotado.

TEOREMA 2.30. *Sean $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein, T un operador lineal en dicho espacio, con dominio de T denso en $\mathcal{K}$. Sean J una simetría fundamental en $\mathcal{K}$ y T^{*J} el adjunto de T respecto al espacio de Hilbert $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$, entonces*

$$T^{[*]} = JT^{*J}J.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in \mathcal{K}$ tales que $x \in \mathrm{Dom}(T^*)$ y $y \in \mathrm{Dom}(T)$, se tiene que

$$\begin{aligned}[Tx, y] &= [JTx, y]_J = [Tx, Jy]_J = [x, T^{*_J}Jy]_J = [Jx, JT^{*_J}Jy]_J \\ &= [JJx, JT^{*_J}Jy] = [x, JT^{*_J}Jy]_J\end{aligned}$$

Por lo tanto $T^{[*]} = JT^{*_J}J$. □

6. Espacios de Krein dados por un operador de Gram

Terminamos este capítulo con una revisión rápida de los espacios de Krein dados por un operador de Gram *regular* W [**2**]. El caso en que W es no acotado o $0 \in \mathrm{spec}(W)$ serán discutidos en el Capítulo 4.

Sea, pues, W un operador acotado auto-adjunto en un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tal que $0 \notin \mathrm{spec}(W)$. Definamos en $\mathcal{H}$ un producto interno no-degenerado mediante

$$[f, g] := \langle f, Wg\rangle, \quad f,\, g \in \mathcal{H}.$$

Como $W^* = W$ y $0 \notin \mathrm{spec}(W)$, el operador J está dado por la descomposición polar

$$W = J|W|$$

es auto-adjunto y unitario, es decir $J^* = J$ y $J^2 = I$.

Luego las proyecciones ortogonales P_+ y $P_- = I - P_+$ de (2.2) proyectan en los autoespacios correspondientes a los auto-valores 1 y -1 de J, respectivamente.

Como consecuencia, J actúa en la suma ortogonal $\mathcal{H} = P_+\mathcal{H} \oplus P_-\mathcal{H}$ mediante

$$J(h^+ + h^-) = h^+ - h^-,$$

donde $h^{\pm} \in P_{\pm}\mathcal{H}$.

De $J^2 = I$, se obtiene

$$[f, g]_J := \langle f, JWg\rangle = \langle f, |W|g\rangle$$

para todo $f, g \in \mathcal{H}$.

Más aún, la condición $0 \notin \operatorname{spec}(W)$ implica que

$$\varepsilon \leq |W| \leq \|W\|$$

para algún $\varepsilon > 0$, loque significa que

$$\varepsilon\langle h, h\rangle \leq \langle h, |W|h\rangle \leq \|W\|\langle h, h\rangle$$

para todo $h \in \mathcal{H}$. Por lo tanto, el espacio de Hilbert con norma $\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ y con J-norma $\|\cdot\|_J$ son equivalentes.

En particular, $\mathcal{H} = P_+\mathcal{H} \oplus P_-\mathcal{H}$ permanece como una suma ortogonal de espacios de Hilbert con respecto a $[\cdot,\cdot]_J$.

Resumiendo, se ha probado que $(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot])$ es un espacio de Krein con descomposición fundamental

$$\mathcal{H} = P_+\mathcal{H} \oplus P_-\mathcal{H}$$

y simetría fundamental J tal que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y $[\cdot,\cdot]_J$ definen normas equivalentes.

7. Espacios de Krein dados por W-métricas regulares

DEFINICIÓN 2.31. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$, y norma inducida $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. Se considera el operador $W = W^* \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$ con $\ker W = \{0\}$. La forma sesquilineal

$$[\cdot,\cdot] = \langle W(\cdot), \cdot\rangle \tag{2.4}$$

definida sobre $\mathcal{H}$ es llamada *W-métrica, o, W-producto interno.* Este operador (W) es llamado *operador de Gram.*

PROPOSICIÓN 2.32. *Un espacio de Hilbert con W-métrica puede ser encajado densamente en un espacio de Krein $\mathcal{H}_W$ con simetría fundamental J.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**2**]. □

Se usará $\rho(W)$ para denotar el conjunto resolvente de W.

OBSERVACIÓN 2.33 (*Consecuencias dadas por el operador de Gram W*). Sea W el operador de Gram sobre $\mathcal{H}$.

(i) si $0 \in \rho(W)$, entonces

$$\|W^{-1}\|^{-1}\|x\|^2 \leq \|x\|_J^2 \leq \|W\|\,\|x\|^2, \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{H}. \tag{2.5}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{H}_W = \overline{(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]_J)}^{\|\cdot\|_J} = (\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]_J)\,. \tag{2.6}$$

(ii) Si $0 \in \sigma(W)$, entonces

$$\|x\|_J \leq \sqrt{\|W\|}\,\|x\|, \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{H}. \tag{2.7}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{H}_W := \overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|_J}. \tag{2.8}$$

Definición 2.34. Sea $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert. El espacio de Krein $\mathcal{H}_W$ es *regular* si el operador de Gram W es tal que $0 \in \rho(W)$. En otro caso se dice *singular*.

Para mas detalles de espacios de Krein regulares y singulares ver [**2**].

Observación 2.35. Se considera la descomposición polar de W dada por

$$W = J|W|, \tag{2.9}$$

donde el operador lineal $J : (\ker\ |W|)^{\perp} = \overline{\text{Rang }\ |W|} = \mathcal{H} \rightarrow \overline{\text{Rang }\ W} = \mathcal{H}$ es una isometría parcial. Pero, $\ker\ J = \{0\}$, esto implica que J es un operador unitario.

Proposición 2.36. *Los operadores $|W|$, W conmutan con J, donde J es tal que* (2.9) *se cumple. También $J = J^*$.*

Demostración. Por las propiedades de la medida espectral se tiene

$$W\,|W| = |W|\,W.$$

Por lo tanto,

$$(J|W| - |W|J)\,|W| = 0.$$

Es decir,

$$J|W| = |W|J.$$

Por otro lado, note que

$$J|W| = W = W^* = |W|J^*.$$

Esto es,

$$|W|\,(J - J^*) = 0.$$

Equivalentemente, $J = J^* = J^{-1}$, porque $\ker |W| = \{0\}$. Sin embargo, $J|W| = |W|J$, por lo cual

$$JW = J\,(J|W|) = J\,(|W|J) = J|W|J = WJ.$$

$\square$

PROPOSICIÓN 2.37. *$\mathcal{H}_W$ es un espacio de Krein con la J-norma generada por el producto escalar*

$$[x, y]_J = [Jx, y] = \langle WJx, y\rangle = \langle |W|x, y\rangle \qquad \textit{para todo } x, y \in \mathcal{H}, \tag{2.10}$$

donde J es la simetría del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $W = J|W|$.

CAPíTULO 3

Marcos en espacios de Krein

1. Bases de la teoría de marcos en espacios de Krein

En este sección establecemos una definición de marcos en espacios de Krein y demostramos que están en correspondencia uno a uno con los marcos en el espacio de Hilbert asociado. Algunas herramientas básicas de la teoría de marcos tal como el operador pre-marco, operador marco y marco dual se describen a continuación, en el lenguaje de los espacios de Krein.

Definición 3.1. Sea $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$ un espacio de Krein. Sea $\mathfrak{N} \subseteq \mathbb{N}$, una sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathfrak{N}} \subset \mathcal{K}$ es llamada un *marco para* $\mathcal{K}$, si existen constantes $0 < A \leq B < \infty$ tales que

$$A\|k\|_J^2 \leq \sum_{n\in\mathfrak{N}} |[k_n, k]|^2 \leq B\|k\|_J^2 \quad \text{para todo } k \in \mathcal{K}. \tag{3.1}$$

Observación 3.2. Estamos interesados principalmente en espacios de dimensión infinita, y debido a que siempre se puede completar un marco finito con elementos cero, asumimos que el conjunto de índices $\mathfrak{N} = \mathbb{N}$ siempre que la finitud de $\mathfrak{N}$ no sea de importancia.

Como en el caso de espacios de Hilbert, nos referimos a A y B como cotas del marco. La mayor constante A y la menor constante B que satisfacen (3.1) son llamadas *cota inferior óptima* y *cota superior óptima*, respectivamente. Si sucede el caso en que $A = B$, es llamado *marco ajustado*. Si se deja de ser un marco cuando se remueve un elemento de la familia, entonces recibe el nombre de *marco exacto*.

El siguiente teorema muestra que los marcos para espacios de Krein permiten determinar marcos para los espacios de Hilbert asociados y viceversa.

Teorema 3.3. *Sean $\mathcal{K}$ un espacio de Krein, J la simetría fundamental y $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un marco para el espacio de Krein $\mathcal{K}$ con cotas del marco $A \leq B$.*
(ii) $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un marco para el espacio de Krein $\mathcal{K}$ con cotas del marco $A \leq B$.*
(iii) $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un marco para el espacio de Hilbert $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot]_J)$ con cotas del marco $A \leq B$.*
(iv) $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un marco para el espacio de Hilbert $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot]_J)$ con cotas del marco $A \leq B$.*

Demostración. La prueba se basa en las propiedades de la simetría fundamental J.

La equivalencia de (i) y (iv) sigue de

$$|[k, k_n]|^2 = |[Jk, Jk_n]|^2 = |[k, Jk_n]_J|^2 .$$

El mismo argumento aplicado a $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ junto con $J^2 = I$ demuestra la equivalencia de (ii) y (iii).

Como J es un operador unitario en $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$, la equivalencia de (iii) y (iv) es obvia.

Esto termina la prueba. $\square$

Recordemos que, dado un marco $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el operador pre-marco $T_0 : \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathcal{H}$ esta definido por (1.2). En el caso especial cuando $\mathcal{H} = \ell_2(\mathbb{N})$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ coincide con la base estándar de $\ell_2(\mathbb{N})$, T_0 es justo la identidad. Por el Teorema 3.3, podríamos definir un operador premarco T para marcos en un espacio de Krein de la misma manera. Pero entonces, si el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se sustituye por un espacio de Krein no trivial de sucesiones $\mathfrak{K}_2(\mathbb{N})$ (ver Capítulo 2), el operador pre-marco $T : \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathfrak{K}_2(\mathbb{N})$ nunca puede ser el operador identidad, en el sentido estricto. Por lo tanto, también permitimos espacios de Krein no triviales para el dominio del operador pre-marco.

Definición 3.4. Sea $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein con simetría fundamental J y sea $(\mathfrak{k}_2(\mathbb{N}), [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein con simetría fundamental $\tilde{J}$ tal que $[\cdot,\cdot]_{\tilde{J}}$ coincide con el producto interno estándar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sobre $\ell_2(\mathbb{N})$. Dado un marco $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $\mathcal{K}$, la aplicación lineal

$$T : \mathfrak{k}_2(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{K}, \quad T\,(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n k_n \tag{3.2}$$

es llamada *operador pre-marco.*

Observe que T está bien definido y es acotado ya que se factoriza como

$$(\mathfrak{k}_2(\mathbb{N}), [\cdot,\cdot]) \xrightarrow{I_{\tilde{J}}} (\ell_2(\mathbb{N}), \langle\cdot,\cdot\rangle) \xrightarrow{T_0} (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J) \xrightarrow{I_J^{-1}} (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]) \tag{3.3}$$

y todo los operadores en (3.3) son acotados.

Aquí se utiliza el hecho de que T_0 es un operador pre-marco, por el Teorema 3.3.iii), aplicado a T_0, y observando que $I_{\tilde{J}}$ y I_J definidos por (2.3) son biyecciones. Como

$$T = I_J^{-1} T_0 I_{\tilde{J}}$$

se deduce a partir de la teoría de marcos en espacios de Hilbert aplicada a T_0 que una sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un marco para $\mathcal{K}$, si y solamente si T está bien definido (i.e. acotado y sobreyectivo).

El adjunto de T está dado por

$$T^{[*]}k = \tilde{J}([k_n, k])_{n\in\mathbb{N}}, \quad k \in \mathcal{K}. \tag{3.4}$$

De hecho, para todo $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{k}_2(\mathbb{N})$ y $k \in \mathcal{K}$, se tiene

$$\begin{aligned}[T\,(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, k] &= \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n k_n, k\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} [\alpha_n k_n, k] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n [k_n, k] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \overline{[k, k_n]} \\ &= \langle (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, ([k, k_n])_{n\in\mathbb{N}} \rangle = [(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \tilde{J}\,([k, k_n])_{n\in\mathbb{N}}].\end{aligned}$$

Para obtener un operador marco dado por una fórmula análoga a (1.5) con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ reemplazado por $[\cdot,\cdot]$, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.5. Sea $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein con simetría fundamental J, $(\mathfrak{k}_2(\mathbb{N}), [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein con simetría fundamental $\tilde{J}$ tal que $[\cdot,\cdot]_{\tilde{J}}$ coincide con el producto interno estándar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sobre $\ell_2(\mathbb{N})$, y $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ un marco para $\mathcal{K}$. El operador

$$S := T\tilde{J}T^{[*]} \tag{3.5}$$

es llamado *operador marco.*

El operador marco cumple

$$Sk = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k_n, k]\, k_n, \quad k \in \mathcal{K}, \tag{3.6}$$

Se deduce inmediatamente a partir de (3.2), (3.4) y $\tilde{J}^2 = Id$. En efecto,

$$\begin{aligned}Sk &= T\tilde{J}T^{[*]}(k) = T\tilde{J}(\tilde{J}(\{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}})) = T\tilde{J}^2(\{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= T(\{[k, k_n]\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k, k_n] k_n,\end{aligned}$$

Por otra parte, S es claramente autoadjunto. En efecto: sean $x, y \in \mathcal{K}$,

$$\begin{aligned}[Sx, y] &= [T\tilde{J}T^{[*]}x, y] = [\tilde{J}T^{[*]}x, T^{[*]}y] \\ &= [T^{[*]}x, \tilde{J}T^{[*]}y] = [x, \left(T^{[*]}\right)^{[*]} \tilde{J}T^{[*]}y] \\ &= [x, T\tilde{J}T^{[*]}y] = [x, Sy]\end{aligned}$$

Si $(\mathfrak{k}_2(\mathbb{N}), [\cdot,\cdot]) = (\ell_2(\mathbb{N}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, entonces $S = TT^{[*]}$, exactamente como en el caso de espacios de Hilbert.

La ecuación (3.6) produce

$$\begin{aligned}[Sk, k] &= \left[\sum_{n\in\mathbb{N}}[k, k_n]k_n, k\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}}[k, k_n][k_n, k] \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}[k, k_n]\overline{[k, k_n]} = \sum_{n\in\mathbb{N}}|[k, k_n]|^2\end{aligned}$$

para todo $k \in \mathcal{K}$.

Reemplazando k por Jk tenemos

$$[SJk, Jk_n] = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\, [Jk, k_n]\, |^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\, [k, Jk_n]\, |^2,$$

entonces

$$\left[Jk, S^{[*]}Jk_n\right] = [k, SJk_n]_J = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\, [k, Jk_n]\, |^2$$

el Teorema 3.3 (ii) garantiza

$$A\|k\|_J^2 \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, k_n]|^2 \le B\|k\|_J^2.$$

Luego

$$A\|k\|_J^2 \le [k, SJk]_J \le B\|k\|_J^2, \quad k \in \mathcal{K}.$$

Por lo tanto SJ es un operador estrictamente positivo sobre espacios de Hilbert $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ que satisface

$$A \le SJ \le B.$$

Además S es invertible con inverso acotado, y

$$B^{-1} \le JS^{-1} \le A^{-1},$$

donde usamos $J^{-1} = J$. Equivalentemente, cuando se ven como operadores positivos en el espacio de Krein $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$, tenemos

$$AJ \le S \le BJ \quad \text{y} \quad B^{-1}J \le S^{-1} \le A^{-1}J.$$

La invertibilidad del operador S nos permite afirmar el Teorema de Descomposición de Marcos exactamente como en el caso de espacios de Hilbert, cf. [**7**, Teorema 5.1.6].

Teorema 3.6 (Teorema de Descomposición de Marcos). *Sea* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un marco para el espacio de Krein* $\mathcal{K}$*, y sea* S *el operador marco. Entonces*

$$k = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k_n\,, k]\, S^{-1} k_n, \tag{3.7}$$

$$k = \sum_{n\in\mathbb{N}} [S^{-1} k_n\,, k]\, k_n, \tag{3.8}$$

y ambas series convergen incondicionalmente para todo $k \in \mathcal{K}$*.*

Demostración. La Ecuación (3.7) se prueba aplicando (3.6) a

$$k = S^{-1}Sk = S^{-1}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} [k_n, k] k_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} S^{-1}\,[k_n, k]\, k_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k_n, k]\, S^{-1} k_n.$$

Dado que la autoadjuntividad de S implica la autojuntividad de S^{-1}, la Ecuación (3.8) se sigue de (3.6) aplicada a

$$k = SS^{-1}k = \sum_{n\in\mathbb{N}} [S^{-1}k_n, k] k_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k, S^{-1}k_n] k_n.$$

Para la prueba de la convergencia incondicional, reemplazamos nuevamente k por Jk, escribimos

$$[k_n\,, Jk] = [k_n\,, k]_J,$$

invocando el Teorema 3.3.iii), y refiriéndonos al caso de espacios de Hilbert [**7**, Teorema 5.1.6]. □

2. Marcos duales

Por el Teorema 3.3, cada marco $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ da lugar a otros tres marcos con operadores marcos un poco diferentes. A continuación, vamos a relacionar estos operadores marcos a S de (3.6). Primero, consideramos el marco $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$. Denotamos el correspondiente operador marco por S_0, que obtenemos de (3.6)

$$S_0 k = \sum_{n\in\mathbb{N}} [Jk_n\,, k]\, Jk_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k_n\,, Jk]\, Jk_n, \quad k \in \mathcal{K}.$$

Sea $k \in \mathcal{K}$, entonces

$$JSJk = J \sum_{n\in\mathbb{N}} [k_n, Jk]\, k_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k_n, Jk]\, Jk_n = S_0(k)$$

por lo tanto $S_0 = JSJ$.

Sea S_1 el operador marco del marco $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot]_J)$. Entonces, por la Ecuación (1.5), tenemos que

$$S_1 k = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k_n\,, k]_J\, k_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k_n\,, Jk]\, k_n = SJ(k), \quad k \in \mathcal{K},$$

y por lo tanto

$$S_1 = S\,J.$$

Denotamos, con S_2 el operador marco, del marco $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot]_J)$, que obtenemos de (1.5). Luego

$$S_2 k = \sum_{n\in\mathbb{N}} [Jk_n\,, k]_J\, Jk_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k_n\,, k]\, Jk_n, \quad k \in \mathcal{K},$$

de modo que

$$S_2 = J\,S.$$

Recordemos que, en la ecuación (1.6), un marco dual para el marco $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para el espacio de Hilbert $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot]_J)$ es un marco $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot]_J)$ satisfaciendo

$$k = \sum_{n\in\mathbb{N}} [g_n\,, k]_J\, k_n, \quad \text{para todo} \;\; k \in \mathcal{K}.$$

Ahora vamos a establecer una definición análoga para espacios Krein y luego describir marcos duales en términos de la simetría fundamental J y el operador marco S. Estos marcos duales se llaman marcos duales *canónicos*.

Definición 3.7. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un marco para el espacio de Krein $\mathcal{K}$. Un marco $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $\mathcal{K}$ es llamado un *marco dual* de $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$k = \sum_{n\in\mathbb{N}} [h_n\,, k]\, k_n,$$

para todo $k \in \mathcal{K}$.

Proposición 3.8. *Sean $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un marco para el espacio de Krein $\mathcal{K}$ y S su operador marco. Entonces*

(i) *$\{S^{-1}k_n\}$ es un marco dual de $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para el espacio de Krein $\mathcal{K}$.*
(ii) *$\{JS^{-1}k_n\}$ es un marco dual de $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para el espacio de Krein $\mathcal{K}$.*
(iii) *$\{JS^{-1}k_n\}$ es un marco dual de $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para el espacio de Hilbert $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot]_J)$.*
iv) $\{S^{-1}k_n\}$ es un marco dual de $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para el espacio de Hilbert $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot]_J)$.

Si $0 < A \leq B < \infty$ son constantes para el marco $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces todos estos marcos duales admiten las constantes de marco $0 < B^{-1} \leq A^{-1} < \infty$.

Demostración.

(i) En el Teorema 3.6, ecuación (3.8), se tiene que

$$k = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[S^{-1}k_n, k\right] k_n$$

por lo tanto $\{S^{-1}k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un marco dual de $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Como $S_0 = JSJ$ es un operador marco para $\mathcal{K}$ con marco $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y además se tiene que $S_0^{-1} = JS^{-1}J$, entonces

$$\begin{aligned}
k &= S_0S_0^{-1}(k) = JSJJS^{-1}Jk \\
&= JSJ^2S^{-1}Jk = JS(S^{-1}Jk) \\
&= J\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}[S^{-1}Jk, k_n]k_n\right) = J\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}[Jk, S^{-1}k_n]k_n\right) \\
&= J\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}[k, JS^{-1}k_n]k_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} J([Jk, S^{-1}k_n]k_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}[k, JS^{-1}k_n]Jk_n
\end{aligned}$$

esto es, $\{JS^{-1}k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un marco dual para $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(iii) Como $S_1 = SJ$ es el operador marco de $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ con inverso $S_1^{-1} = JS^{-1}$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
k &= S_1S_1^{-1}(k) = SJJS^{-1}k = SJ^2S^{-1}k = S(S^{-1}k) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}[S^{-1}k, k_n]k_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}[J^2k, S^{-1}k_n]k_n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}[Jk, S^{-1}k_n]_Jk_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}[k, JS^{-1}k_n]_Jk_n
\end{aligned}$$

así, $\{JS^{-1}k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un marco dual para $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$.

(iv) Como $S_2 = JS$ es el operador marco de $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ con inverso $S_2^{-1} = S^{-1}J$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
k &= S_2S_2^{-1}(k) = JS(S^{-1}Jk) = J\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}[S^{-1}Jk, k_n]k_n\right) \\
&= J\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}[Jk, S^{-1}k_n]k_n\right) = J\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}[k, S^{-1}k_n]_Jk_n\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} J([k, S^{-1}k_n]_Jk_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}[k, S^{-1}k_n]_JJk_n
\end{aligned}$$

esto es, $\{S^{-1}k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un marco dual para $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$. $\square$

3. Marcos ajustados con elementos normalizados

A continuación discutimos la situación de los marcos ajustados con elementos normalizados. La siguiente proposición muestra que estos marcos son en realidad bases J-ortonormalizadas.

PROPOSICIÓN 3.9. *Sea $\{k_n\}_{n\in\mathfrak{N}}$ un marco ajustado para el espacio de Krein $\mathcal{K}$ con cotas de marco $A = B = 1$. Supongamos que $|[k_n, k_n]| = 1$ para todo $n \in \mathfrak{N}$. Entonces $\{k_n\}_{n\in\mathfrak{N}}$ es una base J-ortonormalizada para $\mathcal{K}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para $n \in \mathfrak{N}$, escribimos $k_n = P_+k_n + P_-k_n =: k_n^+ + k_n^- \in \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-$, donde P_+ y P_- denotan las proyección fundamental de (2.2). Establecemos

$$\mathfrak{N}_+ := \{n \in \mathfrak{N} : [k_n, k_n] = 1\},$$

$$\mathfrak{N}_- := \{n \in \mathfrak{N} : [k_n, k_n] = -1\}.$$

Sea $m \in \mathfrak{N}_+$. Entonces

$$1 = [k_m^+, k_m^+] + [k_m^-, k_m^-] \leq [k_m^+, k_m^+].$$

Insertando $k := k_m^+$ y $A = B = 1$ en (3.1) da

$$[k_m^+, k_m^+] = \left|[k_m^+, k_m^+]\right|^2 + \sum_{n\in\mathfrak{N}\setminus\{m\}} \left|[k_m^+, k_n]\right|^2. \tag{3.9}$$

Si tuviéramos $[k_m^+, k_m^+] > 1$, obtendríamos una contradicción. Por lo tanto $[k_m^+, k_m^+] = 1$ y por consiguiente $k_m^- = 0$. Ahora (3.9) implica que

$$[k_m, k_n] = [k_m^+, k_n] = 0$$

para todo $n \in \mathfrak{N}$, $n \neq m$. Reemplazando $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ por $(\mathcal{K}, -[\cdot,\cdot])$ muestra que ocurre lo mismo para todos los $m \in \mathfrak{N}_-$. El resto de la prueba es de rutina. $\square$

La siguiente proposición establece un vínculo con los J-marcos tal como se definen en [**16**]. Vamos a explicar esto después de la prueba.

LEMA 3.10. *Sea $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein con simetría fundamental J y P un proyector ortogonal que conmuta con J, entonces los espacios $P\mathcal{K}$ y $(I - P)\mathcal{K}$ son espacios de Krein con simetrías fundamentales PJ y $(I - P)J$ respectivamente.*

Demostración. (1) Sea $w \in P\mathcal{K}$, luego existe $k \in \mathcal{K}$ tal que $w = Pk$, así:

$$w = Pk = P(k^+ + k^-) = Pk^+ + Pk^-, \quad Pk^+ \in P\mathcal{K}^+ \quad \text{y} \quad Pk^- \in P\mathcal{K}^-.$$

Como $[Pk^+, Pk^-] = [k^+, k^-] = 0$ $(P\mathcal{K}^+ \perp P\mathcal{K}^-)$, por lo tanto

$$P\mathcal{K} = P\mathcal{K}^+[\dot{+}]P\mathcal{K}^-.$$

Como $P\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{K}^+$ es cerrado y $\mathcal{K}^+$ es un espacio de Hilbert, entonces $P\mathcal{K}^+$ es un espacio de Hilbert. Lo mismo sucede para $P\mathcal{K}^-$.

Además, $P^+_{P\mathcal{K}^+} : P\mathcal{K} \longrightarrow P\mathcal{K}^+$, esta dado por

$$P^+_{P\mathcal{K}^+}(Pk) = P^+_{P\mathcal{K}^+}(Pk^+ + Pk^-) = Pk^+,$$

y $P^-_{P\mathcal{K}^-} : P\mathcal{K} \longrightarrow P\mathcal{K}^-$, por

$$P^-_{P\mathcal{K}^-}(Pk) = P^-_{P\mathcal{K}^-}(Pk^+ + Pk^-) = Pk^-.$$

Así, la simetría fundamental está dada por

$$J_{P\mathcal{K}} = P^+_{P\mathcal{K}^+} - P^-_{P\mathcal{K}^-}.$$

Sea $Pk \in P\mathcal{K}$,

$$\begin{aligned} J_{P\mathcal{K}}(Pk) &= (P^+_{P\mathcal{K}^+} - P^-_{P\mathcal{K}^-})(Pk) = P^+_{P\mathcal{K}^+}(Pk) - P^-_{P\mathcal{K}^-}(Pk) \\ &= Pk^+ - Pk^- = P(k^+ - k^-) = PJk \end{aligned}$$

Esto es, PJ es la simetría fundamental para $P\mathcal{K}$.

(2) Ahora veamos que $((I-P)\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ es un espacio de Krein.

Sea $z \in (I-P)\mathcal{K}$, luego existe $k \in \mathcal{K}$ tales que $z = (I-P)k$, así

$$\begin{aligned} z = (I-P)k = Ik - Pk = k^+ + k^- - P(k^+ + k^-) &= k^+ + k^- - Pk^+ - Pk^- \\ = (k^+ - Pk^+) + (k^- - Pk^-) &= (I-P)k^+ + (I-P)k^- \end{aligned}$$

donde $(I-P)k^+ \in (I-P)\mathcal{K}^+ \quad \text{y} \quad (I-P)k^- \in (I-P)\mathcal{K}^-$.

Además,

$$\begin{aligned}
[(I-P)k^+,(I-P)k^-] &= [k^+ - Pk^+, k^- - Pk^-] = [k^+, k^- - Pk^-] - [Pk^+, k^- - Pk^-] \\
&= [k^+,k^-] - [k^+,Pk^-] - [Pk^+,k^-] + [Pk^+,Pk^-] \\
&= -[Pk^+,PPk^-] - [PPk^+,Pk^-] + [Pk^+,Pk^-] \\
&= -[Pk^+,P^2k^-] - [P^2k^+,Pk^-] + [Pk^+,Pk^-] \\
&= -[Pk^+,Pk^-] - [Pk^+,Pk^-] + [Pk^+,Pk^-] \\
&= -[k^+,k^-] - [k^+,k^-] + [k^+,k^-] = 0
\end{aligned}$$

Esto es $(I-P)\mathcal{K}^+ \perp (I-P)\mathcal{K}^-$. Por lo tanto

$$(I-P)\mathcal{K} = (I-P)\mathcal{K}^+[\dot{+}](I-P)\mathcal{K}^-.$$

Como $(\mathcal{K}^+,[\cdot,\cdot])$ es un espacio de Hilbert, y como $(I-P)\mathcal{K}^+$ es cerrado, entonces, $(I-P)\mathcal{K}^+$ es completo. Luego, es un espacio de Hilbert. Lo mismo sucede para $(I-P)\mathcal{K}^-$.

Además, $P^+_{(I-P)\mathcal{K}^+} : (I-P)\mathcal{K} \longrightarrow (I-P)\mathcal{K}^+$, está dada por

$$P^+_{(I-P)\mathcal{K}^+}((I-P)k) = P^+_{(I-P)\mathcal{K}^+}((I-P)k^+ + (I-P)k^-) = (I-P)k^+,$$

y $P^-_{(I-P)\mathcal{K}^-} : (I-P)\mathcal{K} \longrightarrow (I-P)\mathcal{K}^-$, está dada por

$$P^-_{(I-P)\mathcal{K}^-}(Pk) = (I-P)^-_{(I-P)\mathcal{K}^-}((I-P)k^+ + (I-P)k^-) = (I-P)k^-.$$

Así, la simetría fundamental está dada por

$$J_{(I-P)\mathcal{K}} = P^+_{(I-P)\mathcal{K}^+} - P^-_{(I-P)\mathcal{K}^-}.$$

Sea $(I-P)k \in (I-P)\mathcal{K}$,

$$\begin{aligned}
J_{(I-P)\mathcal{K}}((I-P)k) &= (P^+_{(I-P)\mathcal{K}^+} - P^-_{(I-P)\mathcal{K}^-})((I-P)k) \\
&= P^+_{(I-P)\mathcal{K}^+}((I-P)k) - P^-_{(I-P)\mathcal{K}^-}((I-P)k) \\
&= (I-P)k^+ - (I-P)k^- = (I-P)(k^+ - k^-) = (I-P)Jk
\end{aligned}$$

Esto es, $(I-P)J$ es la simetría fundamental para $(I-P)\mathcal{K}$. □

TEOREMA 3.11. *Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Krein con simetría fundamental J, y sea P una proyección ortogonal que conmuta con J.*

Si $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un marco para $\mathcal{K}$ con cotas de marco $A \leq B$, entonces $\{Pk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un marco para $P\mathcal{K}$ y $\{(I-P)k_n\}_{n\in\mathcal{K}}$ es un marco para $(I-P)\mathcal{K}$, ambos admiten las mismas cotas del marco.

Por el contrario, si $\{k_n^+\}_{n\in\mathfrak{N}_+}$ *es un marco para* $P\mathcal{K}$ *y* $\{k_n^-\}_{n\in\mathfrak{N}_-}$ *es uno para* $(I-P)\mathcal{K}$*, ambos con cotas de marco* $A \leq B$*, entonces* $\{k_n^+\}_{n\in\mathfrak{N}_+} \cup \{k_n^-\}_{n\in\mathfrak{N}_-}$ *es un marco para* $\mathcal{K}$ *admitiendo las mismas cotas de marco.*

Demostración. Debido a que P conmuta con J se tiene que $\|k\|_J = \|Pk\|_{PJ}$.

Los subespacios $P\mathcal{K}$ y $(I-P)\mathcal{K}$ de $\mathcal{K}$ son espacio de Krein con simetría fundamental PJ y $(I-P)J$, respectivamente. Dado un marco $\{k_n\}_{n\in\mathfrak{N}}$ para $\mathcal{K}$ con cotas de marco $A \leq B$, tenemos para todo $k \in P\mathcal{K}$

$$A\|k\|_J^2 = A\|Pk\|_J^2 \leq \sum_{n\in\mathcal{K}} |[Pk, k_n]|^2 = \sum_{n\in\mathcal{K}} |[k, Pk_n]|^2 \leq B\|Pk\|_J^2 = B\|k\|_J^2,$$

por lo tanto $\{Pk_n\}_{n\in\mathcal{K}}$ es un marco para $P\mathcal{K}$ con cotas de marco $A \leq B$. Lo mismo sigue siendo cierto para P reemplazado por $I-P$. Esto completa la prueba de i).

Ahora sean $\{k_n^+\}_{n\in\mathfrak{N}_+}$ y $\{k_n^-\}_{n\in\mathfrak{N}_-}$ dos marcos satisfaciendo los supuestos establecidos en la proposición. Para $k \in \mathcal{K}$, establecemos $k^+ := Pk$ y $k^- := (I-P)k$. Tenga en cuenta que

$$[k, k_n^+] = [k, Pk_n^+] = [Pk, k_n^+] = [k^+, k_n^+]$$

y, similarmente, $[k, k_n^-] = [k^-, k_n^-]$. De $PJ = JP$, se deduce que

$$\|k\|_J^2 = \|k^+\|_J^2 + \|k^-\|_J^2.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} A\|k\|_J^2 &= A\|k^+\|_J^2 + A\|k^-\|_J^2 \\ &\leq \sum_{n\in\mathfrak{N}_+} \big|[k^+, k_n^+]\big|^2 + \sum_{n\in\mathfrak{N}_-} \big|[k^-, k_n^-]\big|^2 = \sum_{n\in\mathfrak{N}_+} \big|[k, k_n^+]\big|^2 + \sum_{n\in\mathfrak{N}_-} \big|[k, k_n^-]\big|^2 \\ &\leq B\|k^+\|_J^2 + B\|k^-\|_J^2 = B\|k\|_J^2. \end{aligned}$$

Esto acaba la demostración. □

4. Comentarios adicionales

4.1. Reformulación de la definición de un J-marco.

La definición de un J-marco dada en [**16**] puede ser reformulada así: Dada una sucesión de Bessel $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ (i.e., $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición de la cota superior en (1.1)), considere el producto interno en $\mathfrak{k}_2(\mathbb{N})$ dado por

$$[e_n, e_n] := \begin{cases} 1 & \text{if } [f_n, f_n] \geq 0, \\ -1 & \text{if } [f_n, f_n] < 0, \end{cases}$$

donde $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denota la base estándar del espacio de sucesiones $\ell_2(\mathbb{N})$. Denotemos por $\tilde{J}$ la simetría fundamental de $(\ell_2(\mathbb{N}), [\cdot,\cdot])$ tal que $[\cdot,\cdot]_{\tilde{J}}$ llega a ser el producto interno estándar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sobre $\ell_2(\mathbb{N})$. Luego la proyección fundamental $P_+ = \frac{1}{2}(I+\tilde{J})$ proyecta sobre el subespacio cerrado generado por aquellos e_n que satisfacen $[e_n, e_n] = 1$.

Ahora, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un J-marco si los rangos $\operatorname{ran}(TP_+)$ y $\operatorname{ran}(T(I-P_+))$ son subespacios de $\mathcal{K}$ maximales uniformemente J-positivo y J-negativo, respectivamente, donde T denota el operador pre-marco (3.2).

En [**16**, Ejemplo 3.3], se demostró que no todo marco en $\mathcal{K}$ es un J-marco. Como una consecuencia, la Definición 3.1 y la definición de un J-Marco no son equivalentes.

Sin embargo, por la Teorema 3.11, cada marco $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{K}$ da lugar a un J-marco considerando

$$\left\{\frac{1}{2}(I+J)f_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \left\{\frac{1}{2}(I-J)f_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

y omitiendo elementos ceros si es necesario.

4.2. Observaciones sobre los ejemplos.

Sean $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y J un operador lineal acotado sobre $\mathcal{H}$ tales que $J^2 = I$ y $J^* = J$. Definimos $[h,k] := \langle h, Jk\rangle$ para todo $h,k \in \mathcal{H}$. Entonces $(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot])$ es un espacio de Krein con simetría fundamental J. Notemos que considerando el espacio de Hilbert asociado con el producto interno $[\cdot,\cdot]_J$, cada espacio de Krein es de este tipo. Por el Teorema 3.3, todos los marcos para el espacio de Krein $(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot])$ se obtienen a partir de marcos del espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Nuestro interés en marcos para espacios de Krein se origina de los espacios $Ł_2(\Omega,\mu)$. Si μ es una medida positiva sobre una σ-álgebra sobre Ω y φ es una función real medible tal que $0 < \operatorname{ess\,inf}|\varphi| \le \operatorname{ess\,sup}|\varphi| < \infty$, entonces

$$[f,g] := \int \bar{f} g \varphi \,\mathrm{d}\mu, \quad f,g \in Ł_2(\Omega,\mu), \tag{3.10}$$

define un producto interno (indefinido) tal que $(Ł_2(\Omega,\mu), [\cdot,\cdot])$ resulta ser un espacio de Krein con simetría fundamental J, dada por la multiplicación por la función de señal φ.

Ahora, si permitimos $\operatorname{ess\,inf}|\varphi| = 0$ (pero requerimos sin pérdida de generalidad que $\mu\{\varphi = 0\} = 0$), entonces $(Ł_2(\Omega,\mu), [\cdot,\cdot]_J)$ no es completo. Con el fin de obtener un espacio de Krein con producto interno determinado por (3.10), se debe tomar la completación. Sobre el subespacio denso $Ł_2(\Omega,\mu)$, el producto interno positivo es luego dado por

$$[f,g]_J = \int \bar{f} g |\varphi| \,\mathrm{d}\mu.$$

Por el Teorema 3.3, podemos aplicar la teoría de marcos ya sea para el espacio de Krein o para el espacio de Hilbert asociado. Sin embargo, pasando de φ a $|\varphi|$, uno podría perder algunas propiedades deseadas de φ. Por ejemplo, si φ es diferenciable, $|\varphi|$ no necesariamente tiene que ser así. Por lo tanto preferimos trabajar en el espacio de Krein.

En un nivel abstracto, podemos considerar la multiplicación por φ como un operador actuando en $Ł_2(\Omega, \mu)$,

$$(W_\varphi f)(x) := \varphi(x) f(x). \tag{3.11}$$

El operador W_φ es ilimitado, si $\operatorname{ess\,sup}|\varphi| = \infty$, y auto-adjunto, si establecemos

$$\operatorname{dom}(W_\varphi) := \{f \in Ł_2(\Omega, \mu) : \int |f|^2 |\varphi|^2 \mathrm{d}\mu < \infty\}.$$

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno estándar en $Ł_2(\Omega, \mu)$, la Ecuación (3.10) indica

$$[f, g] = \langle f, W_\varphi g \rangle, \quad f, g \in \operatorname{dom}(W_\varphi).$$

Además, $\operatorname{ess\,inf}|\varphi| = 0$ si sólo si 0 pertenece al espectro de W_φ.

Este es el marco general al cual corresponde al próximo capítulo.

CAPíTULO 4

Marcos en espacios de Krein derivados de una W-métrica

El objetivo de esta sección es mostrar cómo transferir un marco de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ a un espacio de Krein no regular $\mathcal{H}_W$. Aunque, a nivel técnico, podríamos tratar el caso acotado y el caso no acotado a la vez, empezamos por distinguir entre las siguientes situaciones: Primero suponemos que el operador de Gram W es acotado para ilustrar el proceso de completación imponiendo $0 \in \mathrm{spec}(W)$. En segundo lugar permitimos que W sea no acotado pero asumimos que $0 \notin \mathrm{spec}(W)$. La diferencia entre estos dos casos es que en el último, podemos identificar a $\mathcal{H}_W$ con un subespacio de $\mathcal{H}$, y en el primero, tenemos que extender $\mathcal{H}$ tomando una completación. El caso general puede ser obtenido combinando ambas situaciones.

A lo largo de esta sección, $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ representa un espacio de Hilbert separable, y W denota un operador auto-adjunto con dominio $\mathrm{dom}(W) \subset \mathcal{H}$ y descomposición polar $W = J|W|$. Asumimos que $\ker(W) = \{0\}$. Entonces J es un operador auto-adjunto unitario. La letra E será usada para representar la medida de Borel en la σ-álgebra $\Sigma(\mathbb{R})$ a valores proyectores tal que

$$W = \int \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda). \tag{4.1}$$

Definimos

$$[f, g] := \langle f, W g \rangle, \quad f,\, g \in \mathrm{dom}(W). \tag{4.2}$$

De esta forma, $\mathrm{dom}(W)$ resulta ser un espacio con producto interno no degenerado descomponible con descomposición fundamental, $\mathrm{dom}(W) = \mathcal{D}_+ \oplus \mathcal{D}_-$ y simetría fundamental J, donde

$$\mathcal{D}_+ := E(0,\infty)\,\mathrm{dom}(W), \quad \mathcal{D}_- := E(-\infty,0)\,\mathrm{dom}(W), \quad J = E(0,\infty) - E(-\infty,0).$$

Aquí, $\ker(W) = \{0\}$ es necesario ya que de otra manera $\mathrm{dom}(W)$ sería degenerada. De $J^2 = I$, la descomposición polar $W = J|W|$ y la Ecuación (4.2), resulta que

$$[f, g]_J := \langle f, |W| g \rangle, \quad f,\, g \in \mathrm{dom}(W). \tag{4.3}$$

DEFINICIÓN 4.1. Sea $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sea un espacio de Hilbert. El espacio de Krein $\mathcal{H}_W$ se dice ser *regular* si el operador de Gram W es tal que $0 \in \rho(W)$, donde $\rho(W)$ es la resolvente de W. De otra manera se dice ser *singular.*

Para más detalles de los espacios de Krein regulares y singulares es recomendable ver [**2**].

Tomando la clausura bajo la norma definida por $[\cdot,\cdot]_J$ y extendiendo J a la clausura (sin cambiar la notación), obtenemos un espacio Krein $(\mathcal{H}_W, [\cdot,\cdot])$ con simetría fundamental J y descomposición fundamental $\mathcal{H}_W = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ tal que $\mathcal{D}_+$ y $\mathcal{D}_-$ son densos en $\mathcal{H}_+$ y $\mathcal{H}_-$, respectivamente.

Recordar del final de la Sección 7 del Capítulo 2 que, para un operador regular Gram, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y $[\cdot,\cdot]_J$ definen normas equivalentes sobre $\mathcal{H}$. De (1.1) se deduce (por ejemplo, aplicando la restricción $\||W|^{-1}\|^{-1} \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \|W\|$ en la próxima prueba) que normas equivalentes admiten el mismo conjunto de marcos. Por lo tanto, por el Teorema 3.3, cualquier marco para $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ produce uno para $(\mathcal{H}_W, [\cdot,\cdot])$ y viceversa.

La próxima proposición nos dice que esto mismo no se puede mantener para operadores de Gram las cuales no son regulares o no acotados.

PROPOSICIÓN 4.2. *Si $(\mathcal{H}_W, [\cdot,\cdot])$ denota el espacio de Krein descrito anteriormente, entonces*

(i) *Si W es acotado y $0 \in \operatorname{spec}(W)$, entonces cualquier marco $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ no es un marco para $(\mathcal{H}_W, [\cdot,\cdot])$.*

(ii) *Si W es no acotado, cualquier marco $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{dom}(W)$ para $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ no es un marco para $(\mathcal{H}_W, [\cdot,\cdot])$.*

DEMOSTRACIÓN. Usando el teorema espectral, escribimos

$$|W| = \int_{[0,\infty)} \lambda \,\mathrm{d}F(\lambda),$$

donde F denota la correspondiente medida a valores proyectores. Dados $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ tales que $F([\lambda_1,\lambda_2]) \neq 0$, escogemos $h \in F([\lambda_1,\lambda_2])\mathcal{H}$ con $\|h\| = 1$. Entonces h pertenece al dominio de $\sqrt{|W|}^{-1}$ de modo que $g := \sqrt{|W|}^{-1}h$ está bien definida.

De (4.3), obtenemos

$$\|g\|_J^2 = \langle g, |W|g\rangle = \langle h,h\rangle = 1. \tag{4.4}$$

Además, por el teorema espectral,

$$\lambda_1 \leq \int_{[\lambda_1,\lambda_2]} \lambda \,\mathrm{d}\langle h, F(\lambda)h\rangle = \|\sqrt{|W|}h\|^2 = \|\,|W|g\|^2 \leq \lambda_2. \tag{4.5}$$

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un marco para $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con cotas del marco $0 < A \le B < \infty$. Supongamos que $0 \in \operatorname{spec}(W)$. Como 0 no es un valor propio de W, para cada $\lambda_2 > 0$ existe un $\lambda_1 \in (0, \lambda_2)$ tal que $F([\lambda_1, \lambda_2]) \neq 0$. Usando ecuaciones (1.1), (4.4) y (4.5), para g como antes, obtenemos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |[f_n, g]|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f_n, Wg\rangle|^2 \le B\|Wg\|^2 = B\|\,|W|g\,\|^2 \le B\lambda_2\|g\|_J^2, \tag{4.6}$$

y tomando el límite $\lambda_2 \to 0$, se obtiene que no puede existir un marco con cota inferior que satisfaga la Definición 3.1.

Si el operador Gram W es no acotado, entonces para cada $\lambda_1 > 0$ encontramos un $\lambda_2 > \lambda_1$ tal que $F([\lambda_1, \lambda_2]) \neq 0$. Similarmente a (4.6), calculamos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |[f_n, g]|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f_n, Wg\rangle|^2 \ge A\|Wg\|^2 = A\|\,|W|g\,\|^2 \ge A\lambda_1\|g\|_J^2,$$

y ya que $\lambda_1 > 0$ fue tomado arbitrario, no existe una cota superior para el marco. □

Ahora vamos a mostrar cómo transferir marcos para el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ a marcos para el espacio de Krein $\mathcal{H}_W$. Como se indica en el principio de esta sección, comenzamos considerando un operador de Gram acotado.

TEOREMA 4.3. *Sea W un operador auto-adjunto acotado sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que* $\ker(W) = \{0\}$.

(i) *La inclusión $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_W$ es una igualdad si y sólo si $0 \notin \operatorname{spec}(W)$.*

(ii) $\sqrt{|W|} : \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_W \longrightarrow \mathcal{H},\ \ h \longmapsto \sqrt{|W|}h$ *define un operador isométrico y la extensión*

$$U := \overline{\sqrt{|W|}} : \mathcal{H}_W \longrightarrow \mathcal{H}$$

es un operador unitario.

(iii) $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ *es un marco para el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con cotas del marco $A \le B$ si y sólo si $\{U^{-1}k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_W$ es un marco para el espacio Krein $\mathcal{H}_W$ con cotas del marco $A \le B$.*

DEMOSTRACIÓN. La parte (iii) es una consecuencia inmediata de (ii), ya que los operadores unitarios transfieren marcos en marcos con las mismas cotas del marco inicial.

A continuación probaremos (ii). Por (4.3), para todo $h \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\left\langle \sqrt{|W|}\,h\,, \sqrt{|W|}\,h \right\rangle = \langle h\,, |W|h\rangle = [h, h]_J. \tag{4.7}$$

Por lo tanto $\sqrt{|W|} : \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_W \longrightarrow \mathcal{H}$ es una isometría y puede ser extendida a la clausura $\mathcal{H}_W$ de $\mathcal{H}$.

Sólo queda por verificar que su extensión $\overline{\sqrt{|W|}}$ es sobreyectiva. Para esto, es suficiente mostrar que $\sqrt{|W|}\mathcal{H}$ es denso en $\mathcal{H}$. Ya que $\ker(W) = \{0\}$, tenemos $(\sqrt{|W|}\mathcal{H})^{\perp} = \ker(\sqrt{|W|}) = \{0\}$, a partir del cual se deduce el resultado.

La igualdad $\mathcal{H} = \mathcal{H}_W$ para los operadores de Gram W regulares ya se ha discutido antes. Supongamos ahora que $0 \in \operatorname{spec}(W)$. Como es bien conocido, la norma del espacio de Hilbert $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ es más fuerte que $\|\cdot\|_J = \sqrt{[\cdot,\cdot]_J}$ ya que

$$\|h\|_J^2 = \langle h, |W|h\rangle \leq \|W\|\,\|h\|^2$$

para todo $h \in \mathcal{H}$. De la Proposición 4.2 (i), se deduce que las normas no son equivalentes porque normas equivalentes dan lugar al mismo conjunto de marcos. Por lo tanto $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}_W$, ya que de lo contrario $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_W$ podría ser una biyección continua y por lo tanto tendría una inversa acotada, contradiciendo el hecho que las normas no son equivalentes. □

El siguiente teorema trata el caso en que W es no acotado y $0 \notin \operatorname{spec}(W)$. Contrario a la situación anterior, el espacio Krein $\mathcal{H}_W$ entonces puede ser identificado con un subespacio de $\mathcal{H}$.

TEOREMA 4.4. *Sea $W : \operatorname{dom}(W) \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador auto-adjunto sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $0 \notin \operatorname{spec}(W)$. Entonces*

(i) *$\mathcal{H}_W$ puede ser identificado con $\operatorname{dom}(\sqrt{|W|}) \subset \mathcal{H}$.*
(ii) *$\sqrt{|W|} : \operatorname{dom}(\sqrt{|W|}) = \mathcal{H}_W \longrightarrow \mathcal{H}$ es un operador unitario.*
(iii) *$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ es un marco para el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con cotas del marco $A \leq B$ si y sólo si $\{\sqrt{|W|}^{-1}k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_W$ es un marco para el espacio de Krein $\mathcal{H}_W$ con cotas del marco $A \leq B$.*

DEMOSTRACIÓN. Para la prueba de (i), vamos a usar el hecho de que un operador lineal definido densamente T es cerrado si y sólo si su dominio es cerrado con respecto a la norma del gráfico $(\|\cdot\|^2 + \|T(\,\cdot\,)\|^2)^{1/2}$ [**21**, Teorema 5.1]. Como por hipótesis $0 \notin \operatorname{spec}(W)$, resulta que existe un $\epsilon > 0$ tal que $|W| \geq \epsilon$. Por lo tanto, para $h \in \operatorname{dom}(W)$, tenemos

$$\langle h, |W|h\rangle \geq \epsilon\langle h, h\rangle.$$

Recordamos que

$$\|h\|_J^2 = \langle h, |W|h\rangle = \|\sqrt{|W|}h\|^2$$

para todo $h \in \operatorname{dom}(W)$. Así

$$\|h\|_J^2 = \|\sqrt{|W|}h\|^2 \leq \|h\|^2 + \|\sqrt{|W|}h\|^2 \leq (\epsilon^{-1}+1)\,\|\sqrt{|W|}h\|^2 = (\epsilon^{-1}+1)\,\|h\|_J^2,$$

por lo tanto la J-norma $\|\cdot\|_J$ y la norma del gráfico de $\sqrt{|W|}$ son equivalentes en su dominio común de definición.

Como se observó anteriormente, $\mathrm{dom}(\sqrt{|W|})$ es cerrado con respecto a la norma del gráfico ya que un operador auto-adjunto es siempre cerrado. A partir de la equivalencia de las normas sobre el subespacio denso $\mathrm{dom}(W) \subset \mathrm{dom}(\sqrt{|W|})$, sigue que $\mathrm{dom}(\sqrt{|W|})$ es cerrado con respecto a (la extensión de) la norma $\|\cdot\|_J$. Tomar la clausura de $\mathrm{dom}(W)$ nos permite, por lo tanto, identificar $\mathcal{H}_W$ con $\mathrm{dom}(\sqrt{|W|})$.

Para probar (ii), note que $\sqrt{|W|}$ tiene una inversa acotada $\sqrt{|W|}^{-1} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathrm{dom}(\sqrt{|W|})$ ya que $0 \notin \mathrm{spec}(W)$. De

$$\left[\sqrt{|W|}^{-1} h, \sqrt{|W|}^{-1} h\right]_J = \left\langle \sqrt{|W|}^{-1} h \,, |W| \sqrt{|W|}^{-1} h \right\rangle = \langle h, h\rangle$$

para todo $h \in \mathrm{dom}(\sqrt{|W|})$, concluimos que $\sqrt{|W|}^{-1}$ es unitario y por lo tanto $\sqrt{|W|}$ es unitario.

Ahora (iii) se desprende del hecho que $\sqrt{|W|}^{-1}$ es unitario, como en el teorema anterior.

□

El último teorema trata la situación general, en que W puede ser no acotado y 0 puede pertenecer a $\mathrm{spec}(W)$.

Teorema 4.5. *Sea* $W : \mathrm{dom}(W) \longrightarrow \mathcal{H}$ *un operador auto-adjunto sobre el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *tal que* $\ker(W) = \{0\}$. *Entonces*

(i) $\mathrm{dom}(\sqrt{|W|})$ *es completo en la norma* $\|\cdot\|_J$ *si y sólo si* $0 \notin \mathrm{spec}(W)$.

ii) $\sqrt{|W|} : \mathrm{dom}(\sqrt{|W|}) \longrightarrow \mathcal{H}$ *puede ser extendido a un operador unitario.*

$$U := \overline{\sqrt{|W|}} : \mathcal{H}_W \longrightarrow \mathcal{H}.$$

(iii) $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ *es un marco para el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *con cotas del marcos* $A \leq B$ *si y sólo si* $\{U^{-1}k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_W$ *es un marco para el espacio de Krein* $\mathcal{H}_W$ *con cotas del marco* $A \leq B$.

(iv) *Si* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{dom}(\sqrt{|W|}^{-1})$ *es un marco para el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$, *entonces el marco* $\{U^{-1}k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *para el espacio de Krein* $\mathcal{H}_W$ *está dado por* $\{\sqrt{|W|}^{-1}k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración. La primera parte se probará mediante reducción a teoremas anteriores. Para ello, descomponemos $\mathcal{H}$ en la suma ortogonal

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \qquad \mathcal{H}_1 := E([-1,1])\mathcal{H}, \qquad \mathcal{H}_2 := E(\mathbb{R} \setminus [-1,1])\mathcal{H},$$

donde E denota la medida a valores proyecciones de (4.1). Como las proyecciones espectrales conmutan con W y $J = E(0,\infty) - E(-\infty,0)$, los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son invariantes bajo la acción de estos operadores:

$$W_1 := W\restriction_{\mathcal{H}_1} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1, \qquad W_2 := W\restriction_{\mathcal{H}_2} : \mathcal{H}_2 \cap \operatorname{dom}(W) \longrightarrow \mathcal{H}_2,$$
$$J_1 := J\restriction_{\mathcal{H}_1} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1, \qquad J_2 := J\restriction_{\mathcal{H}_2} : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2.$$

Además, los productos internos respetan esta descomposición, es decir,

$$[h_1, h_2] = \langle h_1, Wh_2 \rangle = 0, \quad [h_1, h_2]_J = \langle h_1, |W| h_2 \rangle = 0,$$

para todo $h_1 \in \mathcal{H}_1$, y $h_2 \in \mathcal{H}_2 \cap \operatorname{dom}(W)$. Por lo tanto podemos considerar la clausura de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2 \cap \operatorname{dom}(W)$ bajo la norma $\|\cdot\|_J$ por separado. Notar que, por el teorema espectral, $\operatorname{dom}(W) = \mathcal{H}_1 \oplus (\mathcal{H}_2 \cap \operatorname{dom}(W))$. Tomando la clausura bajo la norma obtenemos

$$\mathcal{H}_W = \mathcal{H}_{W_1} \oplus \mathcal{H}_{W_2},$$

donde $(\mathcal{H}_{W_i}, [\cdot,\cdot])$ denota el espacio de Krein construido a partir del operador Gram W_i sobre $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$. Aplicando el Teorema 4.3 (ii) y el Teorema 4.4 (ii), obtenemos un operador unitario

$$U := \overline{\sqrt{|W_1|} \oplus \sqrt{|W_2|}} \ : \ \mathcal{H}_W = \mathcal{H}_{W_1} \oplus \mathcal{H}_{W_2} \ \longrightarrow \ \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \tag{4.8}$$

de tal manera que su restricción a

$$\mathcal{H}_1 \oplus \big(\mathcal{H}_2 \cap \operatorname{dom}(\sqrt{|W|})\big) = \operatorname{dom}(\sqrt{|W|})$$

está dada por

$$\sqrt{|W_1|} \oplus \sqrt{|W_2|} = \sqrt{|W|}.$$

Por la densidad de $\operatorname{dom}(\sqrt{|W|})$ en $\mathcal{H}_W$, el operador unitario U en (4.8) es la extensión unitaria de $\sqrt{|W|}$. Esto prueba (ii).

Ahora, (i) se sigue del Teorema 4.3 (i) aplicado a $\mathcal{H}_1 \subset \operatorname{dom}(\sqrt{|W|})$ y el operador de Gram acotado $W_1 = W\restriction_{\mathcal{H}_1}$.

La parte (iii) es una consecuencia directa de que U es unitario en (ii).

Finalmente (iv) se obtiene de la siguiente manera a partir de

$$U\restriction_{\operatorname{dom}(\sqrt{|W|})} = \sqrt{|W|},$$

como se observa en el párrafo anterior. □

Por el Teorema 4.5 (i), si $0 \in \operatorname{spec}(W)$, entonces el proceso de finalización siempre requerirá añadir elementos abstractos a $\operatorname{dom}(\sqrt{|W|})$. Uno de los procesos estándares es ver estos elementos como clases de equivalencias de sucesiones de Cauchy. Sin embargo, para L_2-espacios y operadores de multiplicación W_φ como se definió en (3.11), uno puede dar un descripción explícita de $\mathcal{H}_{W_\varphi}$ en términos de funciones medibles.

En el ejemplo final, ilustraremos esto para $\mathcal{H} = \text{Ł}_2(\mathbb{R}, \mu)$. En cierto sentido, este es el caso genérico ya que cualquier operador auto-adjunto en un espacio de Hilbert separable es unitariamente equivalente a una suma directa de operadores de multiplicación. [**20**, Theorem VII 3].

Ejemplo 4.6. Sea μ una medida de Borel localmente finita sobre $\Sigma(\mathbb{R})$ y si $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ denota el espacio de todas las funciones complejas de Borel medibles sobre $\mathbb{R}$. Para $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, definimos como en el final de la última sección

$$\operatorname{dom}(W_\varphi) := \left\{ f \in \text{Ł}_2(\mathbb{R}, \mu) : \int |f|^2 |\varphi|^2 \mathrm{d}\mu < \infty \right\},$$
$$W_\varphi : \operatorname{dom}(W_\varphi) \longrightarrow \text{Ł}_2(\mathbb{R}, \mu), \quad (W_\varphi f)(t) := \varphi(t) f(t).$$

Asumimos que φ es una función a valores reales y que

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = 0\}) = 0.$$

Luego $W_\varphi^* = W_\varphi$ y $\ker(W_\varphi) = \{0\}$ por lo que las hipótesis del Teorema 4.5 se satisfacen.

Salvo equivalencia unitaria, podemos escribir el espacio de la siguiente manera

$$\mathcal{H}_{W_\varphi} = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : \int |f|^2 |\varphi| \mathrm{d}\mu < \infty \right\},$$

además los operadores U y U^{-1} los podemos expresar así

$$U = W_{|\varphi|^{1/2}} \; : \; \mathcal{H}_{W_\varphi} \longrightarrow \text{Ł}_2(\mathbb{R}, \mu),$$

donde

$$(W_{|\varphi|^{1/2}} f)(t) := \sqrt{|\varphi(t)|}\, f(t),$$

y

$$U^{-1} = W_{|\varphi|^{-1/2}} \; : \; \text{Ł}_2(\mathbb{R}, \mu) \longrightarrow \mathcal{H}_{W_\varphi},$$

donde

$$(W_{|\varphi|^{-1/2}} f)(t) := \tfrac{1}{\sqrt{|\varphi(t)|}} f(t).$$

Por el Teorema 4.5, cualquier marco $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $\text{Ł}_2(\mathbb{R}, \mu)$ determina un marco para el espacio de Krein $\mathcal{H}_{W_\varphi}$ con las mismas cotas del marco. Esto puede ser dado por $\left\{ \frac{1}{\sqrt{|\varphi|}} f_n \right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_{W_\varphi}$.

CAPíTULO 5

Marcos de subespacios de espacios de Krein dados por una W-métrica

En este capítulo se investiga la dinámica de los marcos de subespacios sobre espacios de Hilbert con W-métrica, donde el sentido de dinámica se refiere al comportamiento de los marcos de subespacios en $\mathcal{H}_W$ comparado con $\mathcal{H}$ y viceversa. Además se muestra que para cada espacio de Hilbert con W-métrica $\mathcal{H}_W$ con $0 \in \sigma(W)$ tiene una descomposición

$$\mathcal{H}_W = \bigoplus_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}} \mathcal{H}^W_{\psi_n},$$

donde $\mathcal{H}^W_{\psi_n} \simeq \mathbb{L}_2(\sigma(W), x\, d\mu_n(x))$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. También se considera el caso cuando el operador lineal W es no acotado.

Definición 5.1. Un subespacio cerrado V de $\mathcal{K}$ tal que $V \cap V^{[\perp]} = \{0\}$ y $V + V^{[\perp]} = \mathcal{K}$, donde $V^{[\perp]}$ es el J-complemento ortogonal de V es llamado *projectivamente completo.*

Observación 5.2. De ahora en adelante, los subespacios cerrados considerados en este trabajo son siempre proyectivamente completos. Se denotará por P_V y Q_V la proyección ortogonal y J-ortogonal sobre V respectivamente. Esto es, $P_V^{*J} = P_V = P_V^2$ y $Q_V^{[*]} = Q_V = Q_V^2$. Por otro lado, en [**2**] se prueba que cualquier subespacio cerrado V su complemento J-ortogonal $V^{[\perp]}$ y su complemento ortogonal $V^{\perp}$ son subespacios cerrados y están conectados a través de las siguientes relaciones

$$V^{[\perp]} = JV^{\perp}, \quad V^{\perp} = JV^{[\perp]}, \quad (JV)^{[\perp]} = JV^{[\perp]}. \tag{5.1}$$

Por (5.1) se nota que JV es proyectivamente completo si y solo si V es proyectivamente completo. Además, la condición $V \cap V^{[\perp]} = \{0\}$ nos dice que cada $k \in \mathcal{K}$ tiene una única proyección J-ortogonal sobre V, ver [**2**].

Observación 5.3. Sean $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein y V un subespacio cerrado proyectivamente completo de $\mathcal{K}$. Entonces, $V = \overline{V} = \left(V^{[\perp]}\right)^{[\perp]}$, esto implica que $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio de Krein. Por lo tanto $V = V^+ \dotplus V^-$, donde $V^+ \subset \mathcal{K}^+$, y $V^- \subset \mathcal{K}^-$. Así $JV \subset V$.

DEFINICIÓN 5.4. [**2**] Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Krein. Una familia $\{e_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{K}$, con I un conjunto de índices es llamado un *sistema J-ortonormal* si $[e_i, e_j] = \pm\delta_{i,j}$ para todo $i, j \in I$, donde $\delta_{i,j}$ es la delta Kronecker.

EJEMPLO 5.5. El ejemplo más simple de un sistema J-ortonormal $\mathcal{K}$ es la unión de dos sistemas ortonormales (en el sentido usual) de los subespacios $\mathcal{K}^+$ y $\mathcal{K}^-$ respectivamente.

DEFINICIÓN 5.6. [**2**] Un sistema J-ortonormal es *maximal* si no existe otro sistema J-ortonormal que lo contenga, y se dice *J-completo* si no existe un vector no cero el cual es J-ortonormal a este sistema.

DEFINICIÓN 5.7. [**2**] Sea $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein. Una *base J-ortonormal* en $\mathcal{K}$ es un sistema J-ortonormal el cual es J-completo y maximal en $\mathcal{K}$.

PROPOSICIÓN 5.8. *Sean $\mathcal{K}$ y $\widetilde{\mathcal{K}}$ espacios de Krein con simetrías fundamentales $J, \widetilde{J}$ respectivamente. Se considera $V \subset \mathcal{K}$ un subespacio cerrado con proyección J-ortogonal $Q_V : \mathcal{K} \to V$, y proyección ortogonal $P_V : \mathcal{K} \to V$. Sean $\mathcal{U} : (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J) \to \left(\widetilde{\mathcal{K}}, [\cdot,\cdot]_{\widetilde{J}}\right)$ y $\mathcal{T} : \mathcal{K} \to \widetilde{\mathcal{K}}$ operadores unitarios. Entonces*

$$\mathcal{U}P_V\mathcal{U}^{-1} = P_{\mathcal{U}V}, \quad \mathcal{T}Q_V\mathcal{T}^{-1} = Q_{\mathcal{T}V}, \tag{5.2}$$

donde $P_{\mathcal{U}V} : \widetilde{\mathcal{K}} \to \mathcal{U}V$ es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{U}V$, y $Q_{\mathcal{T}V} : \widetilde{\mathcal{K}} \to \mathcal{T}V$ es la proyección J-ortogonal sobre $\mathcal{T}V$. En particular, si $\mathcal{K} = \widetilde{\mathcal{K}}$ y $J = \widetilde{J}$, entonces

$$P_{JV} = JP_VJ = P_V^{[*]}, \quad Q_{JV} = JQ_VJ = Q_V^{*J}. \tag{5.3}$$

PROPOSICIÓN 5.9. *Sea V un subespacio cerrado del espacio de Krein $\mathcal{K}$, con simetría fundamental J.*

(i) *Si P_V es una proyección ortogonal sobre V, entonces $Q_V = P_{JV}P_V$ es una proyección J-ortogonal sobre V.*
(ii) *Si Q_V es una proyección J-ortogonal sobre V, entonces $P_V = Q_{JV}Q_V$ es una proyección ortogonal sobre V.*

DEMOSTRACIÓN. Solo se realizará la prueba de (i), la prueba de (ii) es análoga.

Sea P_V una proyección ortogonal sobre V, se considera $Q_V = P_{JV}P_V$, el cual está bien definido por (5.1). Note que por (5.3) $Q_V^{[*]} = Q_V$, y se obtiene que

$$[Q_Vx, y] = [P_{JV}P_Vx, y] = [P_Vx, P_Vy] = [x, y],$$

para todo $x, y \in V$. Así, $Q_Vx = x$, para todo $x \in V$.

Por otro lado, debido a que $JV \subset V$, se obtiene

$$Q_V^2 = P_{JV}P_V P_{JV}P_V = P_{JV}^2 P_V = P_{JV}P_V = Q_V.$$

□

1. Marco de subespacios en espacios de Krein

Ahora, se consideran los marcos de subespacios en espacios de Krein. Este trabajo se basa en las propiedades dadas para espacios de Hilbert, las cuales pueden encontrarse en [**6**], junto con el estudio de los marcos en espacios de Krein hecho en el Capítulo 3.

Definición 5.10. Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Krein con simetría fundamental J. Considérese una familia de subespacios cerrados $\{V_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{K}$ con $Q_{V_i} : \mathcal{K} \to V_i$ sus respectivas proyecciones J-ortogonales. Fíjese $(x_i)_{i\in I} \in \ell_+^\infty(I)$, se dice que $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un *marco de subespacios* del espacio de Krein $\mathcal{K}$ si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|k\|_J^2 \leq \sum_{i\in I} x_i^2 \,\|Q_{V_i}k\|_J^2 \leq B\|k\|_J^2, \quad \text{para todo } \; k \in \mathcal{K}. \tag{5.4}$$

Observación 5.11. De acuerdo a la definición anterior, y de la misma manera que para el caso de espacios de Hilbert las constantes A y B son llamadas *cotas del marco*. Si $A = B$, la familia $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es llamada un *marco B-ajustado* de subespacios. En particular, si $A = B = 1$, entonces la familia $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es llamada *marco de Parseval* de subespacios. La familia $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es una *base ortonormal* de subespacios cuando

$$\mathcal{K} = \bigoplus_{i\in I} V_i. \tag{5.5}$$

Además, un marco de subespacios $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es *x-uniforme*, si $x := x_i = x_j$ para todo $i, j \in I$. En el caso de que solo se tenga la cota superior, la familia $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es llamada *sucesión de Bessel* de subespacios con cota de Bessel B.

Teorema 5.12 (*Equivalencia de los marcos de subespacios*). *Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Krein con simetría fundamental J. Considérese una familia de subespacios cerrados $\{V_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{K}$ con $Q_{V_i} : \mathcal{K} \to V_i$ y $P_{V_i} : \mathcal{K} \to V_i$ sus respectivas proyecciones J-ortogonal y ortogonal. Fijado $(x_i)_{i\in I} \in \ell_+^\infty(I)$, Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacios de $\mathcal{K}$ con cotas A, B;*
(ii) $\{x_i, JV_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacios de $\mathcal{K}$ con cotas A, B;*
(iii) $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacios de $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ con cotas A, B;*
(iv) $\{x_i, JV_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacios de $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ con cotas A, B.*

Demostración. La equivalencia de (i) y (ii) se sigue de

$$\|Q_{JV_i}k\|_J^2 = \|JQ_{JV_i}k\|_J^2 = \|Q_{V_i}Jk\|_J^2 .$$

El mismo argumento es aplicado a $\{x_i, JV_i\}_{i\in I}$, junto con la Proposición 5.8, permite probar la equivalencia de (iii) y (iv).

$$\|P_{JV_i}k\|_J^2 = \|JP_{JV_i}k\|_J^2 = \|P_{V_i}Jk\|_J^2 .$$

La equivalencia de (i) y (iv) se prueba con la Proposición 5.9 como se sigue, dadas P_{JV_i} y P_{V_i} proyecciones ortogonales sobre JV_i y V_i respectivamente, se define

$$Q_{V_i} = P_{JV_i}P_{V_i},$$

el cual es una proyección J-ortogonal sobre V_i. Así debido a que $J_{V_i} \subset V_i$ se obtiene

$$\|Q_{V_i}k\|_J^2 = \|JP_{V_i}JP_{V_i}k\|_J^2 = \|P_{V_i}P_{JV_i}Jk\|_J^2 = \|P_{JV_i}Jk\|_J^2.$$

□

Proposición 5.13. *Fíjese $\{x_i\}_{i\in I} \in \ell_+^\infty(I)$. Considérese una partición $\{J_i\}_{i\in I}$ del conjunto de indices I tal que $I = \bigsqcup_{i\in I} J_i$ y $\{k_{i,j}\}_{j\in J_i}$ es una sucesión de marcos para el espacio de Krein $\mathcal{K}$ con cotas $A_i, B_i > 0$. Se define $V_i = span_{j\in J_i}\{k_{i,j}\}$ para todo $i \in I$ y se escoge una base J-ortonormal $\{e_{i,j}\}_{j\in J_i}$ para cada subespacio V_i. Supóngase que*

$$0 < A = \inf_{i\in I} A_i \leq B = \sup_{i\in I} B_i,$$

entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(i) *$\{x_ik_{i,j}\}_{i\in I, j\in J_i}$ es un marco para el espacio de Krein $\mathcal{K}$.*
(ii) *$\{x_ie_{i,j}\}_{i\in I, j\in J_i}$ es un marco para el espacio de Krein $\mathcal{K}$.*
(iii) *$\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacios para el espacio de Krein $\mathcal{K}$*

Demostración. Se tiene que $\{k_{i,j}\}_{j\in J_i}$ es una sucesión de marcos para el espacio de Krein $\mathcal{K}$ con cotas $A_i, B_i > 0$. En el Teorema 3.3 se probó que esto es equivalente a decir que $\{k_{i,j}\}_{j\in J_i}$ es una sucesión de marcos para el espacio de Hilbert $(\mathcal{K}, \|\cdot\|_J)$ con las mismas cotas. Así, por el Teorema 5.12 la prueba es análoga al caso de espacios de Hilbert, ver [**6**]. □

Proposición 5.14. *Sean $\mathcal{K}$ y $\widetilde{\mathcal{K}}$ espacios de Krein con simetrías fundamentales J y $\widetilde{J}$ respectivamente. Considérese $\mathcal{U} : (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J) \to \left(\widetilde{\mathcal{K}}, [\cdot,\cdot]_{\widetilde{J}}\right)$ un operador invertible. La familia $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacios para el espacio de Hilbert $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ si y solo si $\{x_i, \mathcal{U}V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacios para el espacio de Hilbert $\left(\widetilde{\mathcal{K}}, [\cdot,\cdot]_{\widetilde{J}}\right)$.*

Demostración. Por la Proposición 5.8 se tiene que la prueba se sigue fácilmente de la igualdad

$$\|P_{V_i}k\|_J^2 = \|\mathcal{U}^{-1}P_{\mathcal{U}V_i}\mathcal{U}k\|_J^2 = \|P_{\mathcal{U}V_i}\mathcal{U}k\|_{\tilde{J}}^2.$$

□

2. Marco de subespacios en espacios de Hilbert W-métrica

En el Capítulo 4 se probó que el comportamiento de los marcos en espacios de Krein dados por una W-métrica depende de las propiedades del operador de Gram W. Esto es, por un lado si es acotado o no y por el otro si $0 \in \rho(W)$ ó $0 \in \sigma(W)$. A continuación se estudiarán los marcos de subespacios en espacios de Hilbert con W-métrica teniendo en cuenta estas propiedades del operador de Gram.

2.1. Marco de subespacios en espacios de Krein regulares.

Teorema 5.15. *Sean $\mathcal{H}_W$ un espacio de Krein regular y $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios cerrados de $\mathcal{H}$. La familia $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacios para el espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ si y sólo si $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacios para $\mathcal{H}_W$.*

Demostración. Sea $Q_{V_i} = P_{JV_i}P_{V_i}$. Por (2.5)

$$\begin{aligned}\|W^{-1}\|^{-1}\sum_{i\in I} x_i^2\,\|P_{JV_i}Jk\|^2 &\leq \sum_{i\in I} x_i^2\,\|P_{V_i}P_{JV_i}Jk\|_J^2 = \sum_{i\in I} x_i^2\,\|Q_{V_i}k\|_J^2 \\ &\leq \|W\|\sum_{i\in I} x_i^2\,\|P_{JV_i}Jk\|^2 . \qquad (5.6)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$] Supóngase que $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacios para el espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con cotas $A, B > 0$, entonces por la desigualdad (5.6) se obtiene que $\{x_i, JV_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacios para $\mathcal{H}_W$ con cotas $A' = \|W^{-1}\|^{-1} A$ y $B' = \|W\|\, B$.

Por el Teorema 5.12 se tiene que $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacios para el espacio de Krein regular $\mathcal{H}_W$.

[$\Leftarrow$ la prueba es análoga al caso anterior. □

2.2. Marco de subespacios en espacios de Krein singulares.

Teorema 5.16. *Sea $\mathcal{H}_W$ un espacio de Krein singular, y $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios cerrados de $\mathcal{H}$. Si $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacios para el espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, entonces $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ no es un marco de subespacios para $\mathcal{H}_W$.*

Demostración. Como $\mathcal{H}_W$ es un espacio de Krein singular, entonces $0 \in \sigma_c(W)$. Así, dado $\varepsilon > 0$, la medida espectral $\mathbf{E}_\lambda$, donde

$$W = \int_{\sigma(W)} \lambda \, d\mathbf{E}_\lambda,$$

satisface que $\mathbf{E}_\lambda\left((0, \varepsilon]\right) \neq 0$.

Sin embargo

$$(0, \varepsilon] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{\varepsilon}{n}, \varepsilon\right],$$

por lo cual, hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{E}_\lambda\left(\left[\frac{\varepsilon}{n_0}, \varepsilon\right]\right) \neq 0.$$

Ahora, supóngase $f \in \mathbf{E}_\lambda\left(\left[\frac{\varepsilon}{n_0}, \varepsilon\right]\right)\mathcal{H} \cap V_j$ para algún $j \in I$ tal que $\|f\| = 1$ y $\|f\|_J \leq 1$ (debido a que $\|f\|_J \leq \|\sqrt{|W|}\| \, \|f\|$).

De esta manera, si $M = \sup_{j \in I} x_j$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} x_i^2 \left\|Q_{V_i} f\right\|_J^2 = x_j^2 \left\|\sqrt{|W|} f\right\|^2 &\leq A^{-1} x_j^2 \sum_{i \in I} x_i^2 \left\|P_{V_i} \sqrt{|W|} f\right\|^2 \\
&\leq \; A^{-1} B M^2 \left\langle \left(\int_{\sigma(W)} |\lambda| \, d\mathbf{E}_\lambda\right) \mathbf{E}_\lambda\left(\left[\frac{\varepsilon}{n_0}, \varepsilon\right]\right) f, f \right\rangle \\
&= A^{-1} B M^2 \int_{\sigma(W)} |\lambda| \, \chi_{\left[\frac{\varepsilon}{n_0}, \varepsilon\right]}(\lambda) d\left(\mathbf{E}_\lambda\right)_{f,f} \\
&\leq \varepsilon B A^{-1} M^2 \langle \mathbf{E}_\lambda\left(\sigma(W)\right) f, f\rangle \\
&= A^{-1} B M^2 \varepsilon \|f\|^2 = A^{-1} B M^2 \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $\varepsilon \to 0$,

$$\inf_{\|f\|_J \leq 1} \left(\sum_{i \in I} x_i^2 \left\|Q_{V_i} f\right\|_J^2\right) = 0. \tag{5.7}$$

Ahora, si $\{x_i, V_i\}_{i \in I}$ es un marco de subespacios para el espacio de Krein singular $\mathcal{H}_W$ con cotas $C, D > 0$, entonces tomando f como antes, por el Teorema 5.12 y por (5.7) se obtiene que $C = 0$, lo cual contradice que $\{x_i, V_i\}_{i \in I}$ sea un marco de subespacios para el espacio de Krein singular $\mathcal{H}_W$. □

Observación 5.17. Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con una W-métrica arbitraria, puede ser inmerso densamente en un espacio de Krein $\mathcal{H}_W$. Por ello, si $\mathcal{H}_W$ es un espacio de Krein regular, entonces los marcos de subespacios pueden ser transferidos de $\mathcal{H}$ a $\mathcal{H}_W$. Esto sucede porque $(\mathcal{H}_W, [\cdot, \cdot]_J) = (\mathcal{H}, [\cdot, \cdot]_J)$ y las normas $\| \cdot \|$ y $\| \cdot \|_J$ son equivalentes. Sin embargo, cuando el espacio de Krein $\mathcal{H}_W$ es singular, los marcos de subespacios no se transfieren mediante la densidad, porque la propiedad $0 \in \sigma(W)$ influye fuertemente. Por lo tanto, se debe encontrar una manera de extender los marcos de subespacios del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ al espacio de Krein singular $\mathcal{H}_W$.

Una forma de extender marcos de subespacios del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ al espacio de Krein singular $\mathcal{H}_W$ se hace de la siguiente manera.

TEOREMA 5.18. *Sea $\mathcal{H}_W$ un espacio de Krein singular. Existe un operador invertible $\mathcal{U} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_W$ tal que:*

(i) *Si $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacios para el espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, entonces $\{x_i, \mathcal{U}V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacios para el espacio de Krein singular $\mathcal{H}_W$.*

(ii) *Si $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacios para el espacio de Krein singular $\mathcal{H}_W$, entonces $\{x_i, \mathcal{U}^{-1}V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio para $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.*

DEMOSTRACIÓN. De la Ecuación 4.7 sigue que el operador $\sqrt{|W|} : \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_W \to \mathcal{H}$, satisface

$$\left\|\sqrt{|W|}k\right\|^2 = \langle\sqrt{|W|}k, \sqrt{|W|}k\rangle = \langle|W|k, k\rangle = \|k\|_J^2.$$

Esto es, $\sqrt{|W|} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_W)$ es una isometría.

Por lo tanto, esta isometría tiene una única extension sobre $\mathcal{H}_W$, denotada $\widehat{\sqrt{|W|}}$. Luego, considerando $\mathcal{U} = \widehat{\sqrt{|W|}}$, las implicaciones (i) y (ii) son consecuencia de los Teoremas 5.12 y 5.14. $\square$

El siguiente resultado es bien conocido, ver [**20**]. Este es de gran importancia para nuestro propósito principal.

PROPOSICIÓN 5.19. *Sea A un operador acotado y auto-adjunto sobre un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$. Entonces,*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \mathcal{H}_{\psi_n}, \tag{5.8}$$

y existen medidas $\{\mu_n\}_{n=1}^N (N = 1, 2, ... o\ \infty)$ sobre $\sigma(A)$ y un operador unitario

$$T : \mathcal{H}_{\psi_n} \to L_2(\sigma(A), d\mu_n) \tag{5.9}$$

tal que

$$\left(TAT^{-1}\psi\right)_n(\lambda) = \lambda\psi_n, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$$

donde se escribe un elemento

$$\psi \in \bigoplus_{n=1}^N L_2(\sigma(A), d\mu_n)$$

como una N-upla $(\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \ldots, \psi_N(\lambda))$.

TEOREMA 5.20. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y W un operador de Gram definido en $\mathcal{H}$ tal que $0 \in \sigma(W)$. Entonces el espacio de Krein singular $\mathcal{H}_W$ tiene una base ortonormal de subespacios.*

DEMOSTRACIÓN. Note que el operador de Gram W es auto-adjunto, entonces por la Proposición 5.19 se tiene (5.8) y existen medidas $\{\mu_n\}_{n=1}^{N}(N = 1, 2, ...\text{or } \infty)$ sobre $\sigma(A)$ tales que $\mathcal{H}_{\psi_n} \simeq L_2(\sigma(W), d\mu_n)$. Por lo tanto $\{\{1\}, \mathcal{H}_{\psi_n}\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ es un marco de Parseval de subespacios para $\mathcal{H}$ con cotas iguales a 1.

Por el Teorema 5.18 se tiene que $\{\{1\}, \mathcal{U}\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ es un marco de Parseval de subespacios para el espacio de Krein singular $\mathcal{H}_W$. En realidad, $\{\{1\}, \mathcal{U}\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ es una base ortonormal de subespacios para $\mathcal{H}_W$. Así se concluye que

$$\mathcal{H}_W = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \mathcal{U}\mathcal{H}_{\psi_n}. \tag{5.10}$$

□

OBSERVACIÓN 5.21. Nótese que si $0 \notin \sigma(W)$, por (2.6) se tiene que

$$\mathcal{H}_W = (\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]_J) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} (\mathcal{H}_{\psi_n}, [\cdot,\cdot]_J)\,. \tag{5.11}$$

TEOREMA 5.22. *Sea $\mathcal{H}_W$ un espacio de Krein singular con operador de Gram W. Entonces $\mathcal{H}_W$ tiene la siguiente descomposición*

$$\mathcal{H}_W = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \mathcal{H}_{\psi_n}^W. \tag{5.12}$$

Además, existen medidas $\{\mu_n\}_{n=1}^{N}(N = 1, 2, ...\,or\, \infty)$ sobre $\sigma(W)$ tales que

$$\mathcal{H}_{\psi_n}^W \simeq L_2(\sigma(W), x d\mu_n(x))$$

es un espacio de Krein para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

DEMOSTRACIÓN. Debido a que el espacio de Krein separable $\mathcal{H}_W$ es singular, el operador de Gram W es tal que $0 \in \sigma(W)$. Por lo tanto, por el Teorema 5.20 la familia $\{\{1\}, \mathcal{U}\mathcal{H}_{\psi_n}\}_n$ es una base ortonormal de subespacios de $\mathcal{H}_W$. Se define

$$\mathcal{H}_{\psi_n}^W := \mathcal{U}\mathcal{H}_{\psi_n}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \tag{5.13}$$

Se intenta probar que $\mathcal{H}_{\psi_n}^W \simeq \mathbb{L}_2(\sigma(W), x\, d\mu_n(x))$.

Fijado $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{L}_2\left(\sigma(W), d\mu_n\right)$ es un espacio de Hilbert, donde μ_n es una medida de Lebesgue. Sobre este espacio de Hilbert se define el operador acotado y autoadjunto dado por

$$\left(W_x f\right)(x) = x f(x).$$

Este operador lineal es tal que

$$\ker W_x = \{0\}$$

debido a que $\mu_n\left(\mathrm{Id}_{\sigma(W)}^{-1}\{0\}\right) = 0$, donde $\mathrm{Id}_{\sigma(W)} x = x$. En efecto, si $\left(W_x f\right)(x) = 0$, para todo $x \in \sigma(W)$, entonces dado $m \in \mathbb{N}$, se toman los conjuntos medibles

$$M_m = \{x \in \sigma(W) : |f(x)| > 1/m\},$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} 0 = \|W_x f\|^2 &= \int_{\sigma(W) \setminus \mathrm{Id}_{\sigma(W)}^{-1}(\{0\})} |f(x)|^2 |x|^2 d\mu_n, \\ &= \int_{M_m} |f(x)|^2 |x|^2 d\mu_n(x) \geq \frac{1}{m^2} \int_{M_m \setminus \mathrm{Id}_{\sigma(W)}^{-1}(\{0\})} |x|^2 d\mu_n(x). \end{aligned}$$

Esto es, $\mu_n\left(M_m\right) = 0, \quad$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Consecuentemente si

$$M^+ = \{x \in \sigma(W) : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_{\frac{1}{m}},$$

entonces $\mu_n\left(M^+\right) = 0$. Así se concluye que $|f| = 0$ en casi toda parte de $\sigma(W)$. Equivalentemente, $f = 0$ en casi toda parte en $\sigma(W)$.

Ahora, si sobre el espacio de Hilbert $\mathbb{L}_2(\sigma(W), d\mu_n(x))$ se toma el operador de Gram W_x, entonces

$$\overline{\mathbb{L}_2(\sigma(W), d\mu_n(x))}^{\|\cdot\|_J} \simeq \mathbb{L}_2(\sigma(W), x\, d\mu_n(x))$$

es un espacio de Krein singular, donde

$$\mathbb{L}_2(\sigma(W), x d\mu_n(x)) := \left\{ f \in \mathbb{L}_2(\sigma(W), d\mu_n) \ : \int_{\sigma(W)} |f(x)|^2 |x| \ d\mu_n(x) < \infty \right\}$$

y

$$\|f\|_J^2 = [f, f]_J = \langle |W_x| f, f \rangle = \int_{\sigma(W)} |f(x)|^2 \, |x| \ d\mu_n(x).$$

Por otro lado, se define el operador lineal $F : \mathbb{L}_2\left(\sigma(W), d\mu_n\right) \longrightarrow \mathbb{L}_2\left(\sigma(W),\, x\, d\mu_n(x)\right)$ dado por

$$(Fg)(x) = \frac{g(x)}{\psi(x)},$$

donde la función ψ es medible y satisface

$$|\psi(x)|^2 = |x|$$

en casi toda parte en $\sigma(W)$. Para $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ fijo se tiene que

$$\mu_n \left(|\psi|^{-1} \{0\}\right) = \mu_n \left(|\mathrm{Id}_{\sigma(W)}|^{-1} \{0\}\right) = 0,$$

y

$$\|Ff\|_J^2 = \int_{\sigma(W)} |f(x)|^2 |\psi^{-1}(x)|^2 |x| \, d\mu_n(x) = \int_{\sigma(W)} |f(x)|^2 \, d\mu_n(x) = \|f\|^2.$$

Además, el operador lineal F tiene inverso, el cual está bien definido y está dado por

$$\left(F^{-1} f\right)(x) = \psi(x) f(x).$$

En conclusión, la demostración del teorema se obtiene del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_{\psi_n} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\mathcal{U}"'] & \mathbb{L}_2(\sigma(W), d\mu_n(x)) \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{H}_{\psi_n}^W \arrow[r] & \mathbb{L}_2\left(\sigma(W), x \, d\mu_n(x)\right), \end{tikzcd} \tag{5.14}$$

donde G es un operador invertible definido en $\mathcal{H}_{\psi_n}$ sobre $\mathbb{L}_2(\sigma(W), d\mu_n(x))$. $\square$

3. Caso en que el operador de Gram W es no acotado.

Desafortunadamente, no se puede obtener resultados similares cuando el operador de Gram W es no acotado sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Principalmente porque las herramientas usadas están basadas en propiedades especificas dadas para el álgebra C^* $\mathbf{B}(\mathcal{H})$.

El operador de Gram W está bien definido con dominio denso $\mathcal{D}_W \subsetneq \mathcal{H}$. Por lo tanto, la W-métrica $[\cdot, \cdot] = \langle W\cdot, \cdot\rangle$ sólo esta definida para $x, y \in \mathcal{D}_W = \mathcal{D}_{W^*}$. La descomposición polar, $W = J|W|$, nos permite definir

$$[x, y]_J := \langle |W| x, y\rangle, \qquad \text{para todo } x,\, y \in \mathcal{D}_W,$$

y por Proposición 2.32 se obtiene que

$$\mathcal{H}_W := \overline{\mathcal{D}_W}^{\|\cdot\|_J}. \tag{5.15}$$

Proposición 5.23. *Sea $\{x_i\}_{i\in I} \in \ell_+^\infty(I)$. Considérese una partición $\{J_i\}_{i\in I}$ de I tal que $I = \bigsqcup_{i\in I} J_i$ y sea $\{k_{i,j}\}_{j\in J_i}$ una sucesión de marcos para el espacio de Hilbert $(\mathcal{H}.\langle\cdot,\cdot\rangle)$ con cotas $A_i, B_i > 0$. Suponga que $V_i = span_{j\in J_i}\{k_{i,j}\}$ para cada $i \in I$ y*

$$0 < A = \inf_{i\in I} A_i \leq B = \sup_{i\in I} B_i.$$

Por lo tanto, si $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacios para el espacio de Hilbert* $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$*, entonces* $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ *no es marco de subespacios para el espacio de Krein* $\mathcal{H}_W$*.*

Demostración. Se tiene que $\{x_i k_{i,j}\}_{i\in I, j\in J_i}$ es un marco para el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (ver [**6**]), pero en la Proposición 4.2 se prueba que $\{x_i k_{i,j}\}_{j\in J_i}$ no es marco para el espacio de Krein $\mathcal{H}_W$ cuando el operador de Gram W es no acotado. Así, por la Proposición 5.13, la familia $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ no es un marco de subespacios para el espacio de Krein $\mathcal{H}_W$. □

Teorema 5.24. *Sea* $\mathcal{H}_W$ *un espacio de Krein con operador de Gram W no acotado y con* $0 \notin \sigma(W)$*. Sea* $G : \mathcal{D}_G \subset \mathcal{H}_W \to \mathcal{H}$ *dado por* $G = \sqrt{|W|}$ *entonces*

(i) *Si* $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacios para el espacio de Hilbert* $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$*, entonces* $\{x_i, G^{-1}V_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacios para el espacio de Krein* $\mathcal{H}_W$*.*
(ii) *Si* $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacios para el espacio de Krein* $\mathcal{H}_W$*, entonces* $\{x_i, G\,V_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacios para el espacio de Hilbert* $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$*.*

Demostración. Debido a que $0 \in \rho(W)$, el operador lineal G es invertible (ver Capítulo 4). Así por la Proposición 5.14, se tiene la prueba. □

Cuando el operador de Gram W es no acotado con $0 \in \sigma(W)$, se obtiene un resultado análogo al Teorema 5.18.

Teorema 5.25. *Sea* $\mathcal{H}_W$ *un espacio de Krein, donde el operador de Gram W es no acotado con* $0 \in \sigma(W)$*. Existe un operador invertible* $\mathcal{U} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_W$ *tal que:*

(i) *Si* $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacios para el espacio de Hilbert* $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$*, entonces* $\{x_i, \mathcal{U}V_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacios para* $\mathcal{H}_W$*.*
(ii) *Si* $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacios para* $\mathcal{H}_W$*, entonces* $\{x_i, \mathcal{U}^{-1}V_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacios para el espacio de Hilbert* $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$*.*

Demostración. Considérese el operador lineal $G : \mathcal{D}_G \subset \mathcal{H}_W \to \mathcal{H}$, dado por

$$G = \sqrt{|W|}.$$

En el Capítulo 4 se probó que para $0 \in \sigma(W)$, este operador tiene una única extensión $\mathcal{U} := \widehat{G} : \mathcal{H}_W \to \mathcal{H}$.

Luego por la Proposición 5.14 se obtiene lo afirmado. □

Bibliografía

[1] P. Acosta, K. Esmeral, O. Ferrer. *Frames of subspaces in Hilbert spaces with W-metrics*, Por aparecer en, *Anale Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, 2014. Citado en la(s) página(s): 2

[2] T. Ya. Azizov, I. S. Iokhvidov. *Linear operator in spaces with an indefinite metric*, Wiley-Interscience, Chichester, 1989. Citado en la(s) página(s): 1, 22, 23, 24, 40, 46, 47

[3] R. Balan, P. Casazza, C. Heil, Z. Landau. *Density, overcompleteness, and localization of frames. I: Theory*. J. Fourier Anal. Appl. 12, No. 2 (2006), 105-143. Citado en la(s) página(s): 6

[4] J. Bognar. Indefinite inner product spaces. Springer, 1974. Citado en la(s) página(s): 15

[5] P. G. Casazza, O. Christensen. *Weyl Heisenberg Frames for subspaces of $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, Proc. Amer. Math. Soc.* 129 (2001), 145-154. Citado en la(s) página(s): 1, 11

[6] P. G. Casazza, G. Kutyniok. *Frame of subspaces*, arXiv:math/0311384. Citado en la(s) página(s): 48, 49, 56

[7] O. Christensen. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston, 2003. Citado en la(s) página(s): 1, 3, 5, 7, 10, 29, 30

[8] O. Christensen, T. K. Jensen. *An introduction to the theory of bases, frames, and wavelets.* Technical University of Denmark, Department of Mathemtics, 1999. Citado en la(s) página(s): 1

[9] I. Daubechies, *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis*, IEEE Trans. Inform. Theory **36** (1990), 961–1005. Citado en la(s) página(s): 1, 3

[10] I. Daubechies, A. Grossmann, Y. Meyer. *Painless nonorthogonal expansions*, J. Math. Phys. **27** (1986), 1271–1283. Citado en la(s) página(s): 1

[11] H. Deguang, K. Kornelson, D. Larson , E. Weber. *Frames for undergraduates*, Student Mathematical Library, A.M.S Providence, 2007. Citado en la(s) página(s): 1

[12] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer. *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 341–366. Citado en la(s) página(s): 1, 3

[13] K. Esmeral, O. Ferrer, E. Wagner. *Frames in Krein spaces arising from a non-regular W-metric.* Por aparecer en *Banach J. Anal.* Vol. 9, number 1, 2015. Citado en la(s) página(s): 2

[14] O. Ferrer, *Levantamiento de formas esencialmente invariantes y transferencia de productos internos en espacios de métrica indefinida, Trabajo de Grado de Maestría*, Postgrado en Matemática, Universidad Central de Venezuela, 2008. Citado en la(s) página(s): 17, 18

[15] P. Găvruţa, *On the duality of fusion frames. J. Math. Anal. Appl.*, 333 (2007), 871-879. Citado en la(s) página(s): 1

[16] J. I. Giribet, A. Maestripieri, F. Martínez Pería, P. Massey, *On frames for Krein spaces*, J. Math. Anal. Appl. 393 (2012), 122–137. Citado en la(s) página(s): 1, 33, 36, 37

[17] K. Gröchenig, *Foundations of time-frequency analysis*, Birkhäuser, Boston, 2001. Citado en la(s) página(s): 1

[18] I.S. Iohvidov, M.G. Krein, H. Langer. *Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric*. Mathematical Research, Vol. 9. Berlin: Akademie-Verlag, 1982. Citado en la(s) página(s): 20

[19] I. Peng, S. Waldron, *Signed frames and Hadamard products of Gram matrices*, Linear Algebra Appl. **347** (2002), 131–157. Citado en la(s) página(s): 1

[20] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Academic Press, New York, 1980. Citado en la(s) página(s): 45, 52

[21] J. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer Verlag, New York, 1980. Citado en la(s) página(s): 42