UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

LEVANTAMIENTO DE FORMAS ESENCIALMENTE INVARIANTES Y TRANSFERENCIA DE PRODUCTOS INTERNOS EN ESPACIOS DE MÉTRICA INDEFINIDA

Autor: Esp. Osmin Ferrer Villar
Tutor: Dra. Marisela Domínguez.

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Magister Scientiarium, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela
20 de Octubre de 2008

Agradecimiento

Debido a la gran importancia que tiene para mí la cualidad de ser agradecido, no quiero dejar de nombrar a nadie en esta parte, por eso agradezco a todo aquel que no pueda nombrar aquí.

Gracias a Dios mi protector y guía en la vida por ser todo en mí, también por permitirme encontrarme en el camino a la Dra. Marisela Domínguez mi apreciada tutora, a la cual agradezco su gran disposición para orientarme, al Dr. Ramón Bruzual por ser factor fundamental de mi viaje a Caracas, por sus excelentes orientaciones, por su amistad, por ser un ejemplo para mí como persona y como investigador. A mi esposa por su sacrificio y tenacidad, pero sobre todo por ser madre y padre de mis dos tesoros Kandy y Xavy, a mi madre porque aún en silencio siempre busca lo mejor para mí, a los mejores hermanos del mundo Carlos por ser todo, luz por ser eso en mi vida también al resto de mis hermanos y hermanas por desearme y esperar siempre lo mejor de mí, a mi querido sobrino Carlos Mario por estar conmigo en todo momento, también al resto de mis sobrinos para los cuales seguiré siendo un ejemplo, a mi suegra Marcilia por ser también madre para mí, a mis primas, primos y tía en Caracas por entregarlo todo a mi familia. A mis grandes amigos Angel Padilla, Arnoldo Teheran, Cesar Atencia y Leonardo Carvajal por desearme y buscar lo mejor para mí. A los profesores Nicolás de la Espriella, Franklin Peniche y Francisco Torres por rodearme en Caracas, en la Uninorte a Agustín Barrios por su incondicional compañía, en la Unicórdoba a los profesores Abraham Arenas por ser siempre un impulso para salir adelante, Sergio Avilez por desearme lo mejor, en general a toda mi gente de la Unicórdoba quien por siempre sera mi universidad. También a todos los profesores del Postgrado en Matemática de la UCV, lo mismo que a Eddy y Maribel por estar siempre dispuestas a ayudarme.

Índice general

Resumen

En espacios de métrica indefinida se introducen las nociones de sistemas de scattering, formas invariantes y esencialmente invariantes en sistemas de scattering, se demuestra que toda forma esencialmente invariante puede ser extendida a una forma invariante.

Dado un espacio de Krein y una simetría fundamental asociada, se dan condiciones necesarias para que un operador conmute con la simetría fundamental. También se dan condiciones necesarias y suficientes para que un operador unitario en un espacio de Krein sea unitario en el espacio de Hilbert asociado, se introduce la noción de acoplador unitario en espacios de Krein y se usa este hecho para realizar una transferencia de productos internos indefinidos.

Introducción

Usualmente se trabaja con productos internos definidos no negativos, en este trabajo consideraremos espacios con productos internos más generales y para estos productos se presentarán algunos resultados similares a los de los productos internos clásicos. De acuerdo a la característica que poseen sus elementos con respecto al producto interno aquí considerado se definen varios subconjuntos del espacio y se da la definición de parte isotrópica de un espacio con producto interno. Esto permite clasificar lo que usualmente se conoce como espacio degenerado y no degenerado. De lo anterior se llega a lo que se conoce como descomposición fundamental, los proyectores fundamentales con respecto a los subconjuntos de la descomposición fundamental y la simetría fundamental. Esto permite introducir los bien conocidos espacios de Krein. Posteriormente se demuestra que el espacio de Krein y la simetría fundamental permiten asociar un espacio de Hilbert.

En este trabajo también se presentan los resultados dados por Cotlar y Sadosky en los que extienden formas esencialmente invariantes y transfieren productos internos en espacios de Hilbert.

Finalmente se presentan los principales aportes de este trabajo: se extienden algunas definiciones dadas en espacios de Hilbert a espacios con métrica indefinida, algunas de ellas son sistemas de scattering, formas esencialmente invariantes y acopladores. Se dan condiciones necesarias y suficientes para que un operador conmute con la simetría fundamental asociada a un espacio de Krein, además dada una forma esencialmente invariante en sistemas de scattering para espacios de Krein, se obtiene en forma natural una extensión para ésta en los espacios de Krein que componen los sistemas de scattering. A través de acopladores también se logra transferir productos internos indefinidos y como consecuencia se transfieren las normas asociadas a las simetrías fundamentales.

CAPíTULO 1

Espacios con métrica indefinida.

Este capítulo comienza con algunas observaciones sobre espacios vectoriales. Luego se introducen la noción de espacio con producto interno general y de espacio con métrica indefinida.

Sea V un espacio vectorial. Una *variedad lineal* en V es un subconjunto no vacío de V que es estable con respecto a las operaciones de suma de vectores y producto de un escalar por un vector.

Sean $A_1, A_2, \ldots A_n$ subconjuntos de V, la *variedad lineal generada* por $A_1, A_2, \ldots A_n$ es la menor variedad lineal que contiene a $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ y se denotará por

$$\bigvee\{A_1,\ A_2, \ldots A_n\}.$$

Si $\pounds_1, \pounds_2, \ldots \pounds_n$ son variedades lineales en V, el espacio $\bigvee\{\pounds_1,\ \pounds_2, \ldots \pounds_n\}$ puede ser denotado por

$$\pounds_1 + \pounds_2 + \pounds_3 + \ldots + \pounds_n.$$

La suma vectorial (generada) de variedades lineales linealmente independientes $\pounds_1, \pounds_2, \ldots \pounds_n$ es llamada *suma directa* y se denota por

$$\pounds_1 \dot{+} \pounds_2 \dot{+} \pounds_3 \dot{+} \ldots \dot{+} \pounds_n.$$

Si $\pounds$ es una variedad lineal en V por el lema de Zorn, existe una variedad lineal $\mathcal{M}$ en V tal que

$$\pounds \cap \mathcal{M} = \{0\} \qquad y \qquad V = \pounds \dot{+} \mathcal{M}. \tag{1.1}$$

Más aún, dada una variedad lineal $\mathcal{M}_1$ en V tal que

$$\pounds \cap \mathcal{M}_1 = \{0\}$$

se puede hallar una variedad lineal $\mathcal{M}$ que contiene a $\mathcal{M}_1$ con las propiedades (1.1). En este caso se dice que $\mathcal{M}$ es una *variedad lineal complementaria* para $\pounds$ con respecto a V.

En la terminología de este trabajo los productos internos son más generales que los usados para definir espacios de Hilbert.

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial, un *producto interno* en V, es una función $[\cdot,\cdot] : V \times V \to \mathbb{C}$ tal que:

(1) $[x+y,z] = [x,z] + [y,z]$ para todo $x,y,z \in V$.
(2) $[\alpha x, y] = \alpha\,[x,y]$ para todo $x,y \in V$.
(3) $[x,y] = \overline{[y,x]}$ para todo $x,y \in V$.

Al par $(V,[\cdot,\cdot])$ se le llama *espacio con producto interno* .

Ejemplo 1.2. Consideremos el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +)$, con la suma usual.

Sea $[\cdot,\cdot] : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$[(x_1,y_1),(x_2,y_2)] = x_1x_2 - y_1y_2$$

Sean $u = (x_1,y_1)$, $v = (x_2,y_2)$ y $w = (x_3,y_3)$.

$$\begin{aligned}
[u+v,w] &= [(x_1,y_1)+(x_2,y_2),(x_3,y_3)] \\
&= [(x_1+x_2,y_1+y_2),(x_3,y_3)] \\
&= (x_1+x_2)x_3 - (y_1+y_2)y_3 \\
&= x_1x_3 + x_2x_3 - y_1y_3 - y_2y_3 \\
&= (x_1x_3 - y_1y_3) + (x_2x_3 - y_2y_3) \\
&= [(x_1,y_1),(x_3,y_3)] + [(x_2,y_2),(x_3,y_3)] \\
&= [u,w] + [v,w]\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha u,v] &= [\alpha(x_1,y_1),(x_2,y_2)] \\
&= [(\alpha x_1,\alpha y_1),(x_2,y_2)] \\
&= \alpha x_1x_2 - \alpha y_1y_2 \\
&= \alpha(x_1x_2 - y_1y_2) \\
&= \alpha\,[u,v]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[u,v] &= [(x_1,y_1),(x_2,y_2)] \\
&= x_1x_2 - y_1y_2 = x_2x_1 - y_2y_1 \\
&= \overline{x_2x_1 - y_2y_1}, \\
&= \overline{[(x_2,y_2),(x_1,y_1)]} \\
&= \overline{[v,u]}
\end{aligned}$$

pues $x_2x_1 - y_2y_1 \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto $(\mathbb{R}^2, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con producto interno.

$(V, -[\cdot,\cdot])$ también es un espacio con producto interno, se le conoce como el *anti-espacio* de $(V, [\cdot,\cdot])$.

Observación 1.

(1) Para todo $x \in V$ se tiene que $[0, x] = 0$.

Pues

$$\begin{aligned} 0 &= [0,x] - [0,x] \\ &= [2\times 0, x] - [0,x] \\ &= 2\,[0,x] - [0,x] \\ &= [0,x]\,. \end{aligned}$$

(2) Para todo $x, y, z \in V$ se tiene que $[x, y+z] = [x,y] + [x,z]$.

En efecto,

$$\begin{aligned} [x, y+z] &= \overline{[y+z, x]} \\ &= \overline{[y,x] + [z,x]} \\ &= \overline{[y,x]} + \overline{[z,x]} \\ &= [x,y] + [x,z]\,. \end{aligned}$$

(3) $[x,x] = \overline{[x,x]}$, y por lo tanto $[x,x] \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.3. *Si $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con producto interno entonces se cumple la propiedad de polarización, es decir, para todo $x, y \in V$ se tiene que*

$$[x,y] = \frac{1}{4}\,[x+y, x+y] - \frac{1}{4}\,[x-y, x-y] + \frac{i}{4}\,[x+iy, x+iy] - \frac{i}{4}\,[x-iy, x-iy]\,.$$

1. Vectores positivos, negativos y neutros con respecto a un producto interno.

Como $[x,x] \in \mathbb{R}$ para todo $x \in V$, entonces la propiedad de tricotomía de los números reales garantiza que una y sólo una de las siguientes tres condiciones se cumple

$$[x,x] = \begin{cases} > 0 & \text{(en este caso se dice que } x \text{ es positivo)} \\ < 0 & \text{(en este caso se dice que } x \text{ es negativo)} \\ = 0 & \text{(en este caso se dice que } x \text{ es neutro)} \end{cases}$$

Puede ocurrir que x sea neutro aún cuando $x \neq 0$.

Ejemplo 1.4. Analizando el Ejemplo 1.2 encontramos que si $x = (1,1) \neq (0,0)$ tenemos que

$$[(1,1),(1,1)] = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

Las consideraciones anteriores nos llevan a distinguir los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} B^{+} &= \{x \in V : [x,x] \geq 0\} \\ B^{-} &= \{x \in V : [x,x] \leq 0\} \\ B^{++} &= \{x \in V : [x,x] > 0 \text{ ó } x = 0\} \\ B^{--} &= \{x \in V : [x,x] < 0 \text{ ó } x = 0\} \\ \mathcal{N} &= \{x \in V : [x,x] = 0\} \end{aligned}$$

Note que $\mathcal{N} \neq \emptyset$, pues $0 \in \mathcal{N}$.

Observación 2.

(a) $B^{++} \subseteq B^{+}$. La prueba se obtiene usando que $x = 0$ implica $[x,x] = 0$.
(b) $B^{--} \subseteq B^{-}$. La prueba es análoga a la anterior.
(c) Puede ocurrir que exista $x \in B^{+}$ y sin embargo este $x \notin B^{++}$. Esto ocurre cuando existe $x \in V$, $x \neq 0$ tal que $[x,x] = 0$.
(d) $\mathcal{N} = B^{+} \cap B^{-}$. Esto es consecuencia de que $[x,x] = 0$ si y sólo si $[x,x] \geq 0$ y $[x,x] \leq 0$.

Definición 1.5. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno. Se dice que

(a) $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con *producto interno indefinido* cuando posee tanto elementos positivos como elementos negativos. Es decir, existen $a, b \in V$ tales que $[a,a] > 0$ y $[b,b] < 0$.
(b) $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con *producto interno semidefinido* cuando no es indefinido.
(c) $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con *producto interno semidefinido positivo* cuando $[x,x] \geq 0$ para todo $x \in V$.
(d) $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con *producto interno semidefinido negativo* cuando $[x,x] \leq 0$ para todo $x \in V$.
(e) $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con *producto interno definido* cuando $x \in V$ y $[x,x] = 0$ implica $x = 0$.
(f) $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con *espacio con producto interno neutro* cuando $[x,x] = 0$ para todo $x \in V$.

Notemos que:

(a) El producto interno es indefinido si y sólo si $B^{++} \neq \{0\}$ y $B^{--} \neq \{0\}$.
(b) El producto interno es definido si y sólo si $B^{++} = \{0\}$ ó $B^{--} = \{0\}$.
(c) El producto interno es semidefinido positivo si y sólo si $B^{--} = \{0\}$.
(d) El producto interno es semidefinido negativo si y sólo si $B^{++} = \{0\}$.
(e) El producto interno es definido no posee elementos neutros no nulos.

PROPOSICIÓN 1.6. *Si $(V, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con producto interno semidefinido, entonces se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Esto es,*

$$|\,[x,y]\,|^2 \leq [x,x]\,[y,y]$$

para todo $x, y \in V$.

DEMOSTRACIÓN. Si $(V, [\cdot,\cdot])$ es semidefinido positivo, la prueba es la usual dada para espacios de Hilbert.

Si $(V, [\cdot,\cdot])$ es semidefinido negativo, consideremos la función $[\cdot,\cdot]_o : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$[x,y]_o = -\,[x,y]\,.$$

Así

$$[x,y]_o = -\,[x,y] \geq 0.$$

Luego

$$|\,[x,y]\,|^2 = |\,-\,[x,y]\,|^2 = |\,[x,y]_o\,|^2 \leq (-\,[x,x])(-\,[y,y]) = [x,x]\,[y,y]$$

para todo $x, y \in V$. □

TEOREMA 1.7. *Todo espacio con producto interno indefinido posee elementos neutros no nulos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido. Entonces existen $a, b \in V$ tales que $[a,a] > 0$ y $[b,b] < 0$. Por lo tanto $[a,a]\,[b,b] < 0$, luego

$$-4\,[a,a]\,[b,b] \geq 0.$$

Consideremos la ecuación cuadrática para la variable x

$$[b,b]\,x^2 + 2\,\mathrm{Re}\,[a,b]\,x + [a,a] = 0. \tag{1.2}$$

Como $(2\,\mathrm{Re}\,[a,b])^2 \geq 0$ y $-4\,[a,a]\,[b,b] \geq 0$, entonces

$$(2\,\mathrm{Re}\,[a,b])^2 - 4\,[a,a]\,[b,b] \geq 0$$

y también se tiene que $[b,b] \neq 0$. Por lo tanto la ecuación (1.2) tiene solución en $\mathbb{R}$.

Sea $x_o \in \mathbb{R}$ solución de (1.2). Definamos $c = a + x_o b$, se probará que $[c,c] = 0$ y $c \neq 0$. En efecto

$$\begin{aligned}
[c,c] &= [a + x_o b, a + x_o b] \\
&= [a, a + x_o b] + [x_o b, a + x_o b] \\
&= [a,a] + [a, x_o b] + [x_o b, a] + [x_o b, x_o b] \\
&= [a,a] + \overline{x_o}\,[a,b] + x_o\,[b,a] + x_o \overline{x_o}\,[b,b]\,.
\end{aligned}$$

Usando que $x_o \in \mathbb{R}$ y que x_o es solución de (1.2) se obtiene

$$\begin{aligned}
[c,c] &= [a,a] + x_o\,[a,b] + x_o\,[b,a] + x_o x_o\,[b,b] \\
&= [a,a] + x_o\,[a,b] + x_o\overline{[a,b]} + x_o^2\,[b,b] \\
&= [a,a] + 2x_0 \operatorname{Re}[a,b] + x_o^2\,[b,b] \\
&= [b,b]\,x_o^2 + 2\operatorname{Re}[a,b]\,x_o + [a,a] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado si $c = 0$, se tendría $a = -x_o b$. Luego

$$\begin{aligned}
0 &< [a,a] \\
&= [-x_o b, -x_o b] \\
&= (-x_o)\overline{(-x_o)}\,[b,b] \\
&= x_o^2\,[b,b] \leq 0.
\end{aligned}$$

Esto es una contradicción.

Así que V posee elementos neutros no nulos. □

Note que si el producto interno es definido, $[x,x] = 0$ implica $x = 0$, entonces el producto interno no posee elementos neutros no nulos, por lo tanto no es indefinido. Esto prueba el siguiente resultado.

Definición 1.8. Una variedad lineal V es *definida positiva* (*definida negativa*) si para todo $x \in V \setminus \{0\}$ se cumple que: $[x,x] > 0$ ($[x,x] < 0$).

Teorema 1.9 (Krein-Smulian). *Si el espacio con producto interno V posee al menos un vector positivo (negativo), entonces todo elemento de V es la suma de dos vectores positivos (negativos).*

La prueba de este resultado es sencilla y puede verse en el primer capítulo del libro de Bognar (ver [**2**], página 6).

2. Ortogonalidad.

Definición 1.10. Sean V un espacio con producto interno y sean $x, y \in V$. Se dice que x, y son *vectores ortogonales* cuando $[x, y] = 0$. Esto se denota mediante $x \perp y$.

Definición 1.11. Sean V un espacio con producto interno y sean A y B subconjuntos de V. Se dice que A y B son *conjuntos ortogonales* cuando $a \perp b$ para todo $a \in A$, para todo $b \in B$. Esto se denota mediante $A \perp B$.

Notación 1.1. Cuando $[x, y] = 0$ para todo $y \in Y$ escribiremos $[x, Y] = 0$.

Proposición 1.12. *Si V es un espacio con producto interno neutro, entonces $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in V$.*

Demostración. Sean $x, y \in V$, entonces $[x, x] = 0$, $[y, y] = 0$ pues V es neutro.
Por la desigualdad de polarización se tiene que

$$[x, y] = \frac{1}{4}[x+y, x+y] - \frac{1}{4}[x-y, x-y] + \frac{i}{4}[x+iy, x+iy] - \frac{i}{4}[x-iy, x-iy] = 0.$$

□

Definición 1.13. Sea $(V, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno y E subconjunto de V, el *compañero ortogonal* de E, denotado por $(E^{\perp})$, es

$$E^{\perp} = \{x \in V : [x, E] = 0\}.$$

Proposición 1.14. *Si $(V, [\cdot, \cdot])$ es un espacio con producto interno y $W \subset V$, entonces*
(a) $W \subseteq W^{\perp\perp}$.
(b) $W^{\perp} \subseteq W^{\perp\perp\perp}$.

Demostración.
(a) Sean $x \in W$. Entonces $[x, y] = 0$ para todo $y \in W^{\perp}$. Luego $x \in W^{\perp\perp}$. Por lo tanto $W \subseteq W^{\perp\perp}$.
(b) Para probar $W^{\perp} \subseteq W^{\perp\perp\perp}$ basta aplicar la parte (a) al conjunto $W^{\perp}$. □

Definición 1.15. Sean $(V, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno y $\pounds$ una variedad lineal contenida en V. Si $\pounds$ es la suma de variedades lineales $\pounds_1, \pounds_2, \pounds_3, \ldots, \pounds_n$ ortogonales dos a dos, se dice que $\pounds$ es la *suma ortogonal* de las variedades $\pounds_1, \pounds_2, \pounds_3, \ldots, \pounds_n$ y escribiremos

$$\pounds = \pounds_1 \,[+]\, \pounds_2 \,[+]\, \pounds_3 \,[+] \ldots [+]\, \pounds_n.$$

Si además la suma es directa, entonces decimos que $\mathcal{L}$ es la *suma directa ortogonal* de las variedades $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \ldots, \mathcal{L}_n$ y escribiremos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 [\dot{+}] \mathcal{L}_2 [\dot{+}] \mathcal{L}_3 [\dot{+}] \ldots [\dot{+}] \mathcal{L}_n.$$

Definición 1.16. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal en V, la variedad lineal

$$W^o = W \cap W^\perp$$

se llama la *parte isotrópica* de W y sus elementos se llaman *vectores isotrópicos.*

Note que en cualquier caso este conjunto es no vacío:

$$W^o \neq \emptyset.$$

Esto se debe a que $0 \in W$ y $0 \in W^\perp$ luego $0 \in W \cap W^\perp = W^o$.

Definición 1.17. Si $W^o \neq \{0\}$ se dice que W es una variedad lineal *degenerada.* En caso contrario, se dice que W es una variedad lineal *no degenerada.*

Proposición 1.18. *Sean $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y $\mathcal{N}$ el conjunto de vectores neutros de V. Si W es una variedad lineal en V y W^o es la parte isotrópica de W entonces*

$$W^o \subseteq \mathcal{N}.$$

Demostración. Si $x \in W^o$ entonces $x \in W \cap W^\perp$, luego $[x,x] = 0$ y por lo tanto $x \in \mathcal{N}$. $\square$

Proposición 1.19. *Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ espacio con producto interno semi-definido, entonces la parte isotrópica de V es el conjunto de vectores neutros. Es decir,*

$$V^o = \mathcal{N}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{N}$. Entonces $x \in V$ y se tiene que $[x,x] = 0$.

Para probar que $x \in V^\perp$ se toma $y \in V$. Como el producto es semidefinido vale la desigualdad de Cauchy -Schwartz. Por lo tanto se tiene que

$$0 \leq |\,[x,y]\,|^2 \leq [x,x]\,[y,y] = 0.$$

De donde $[x,y] = 0$. Luego $x \in V^\perp$.

Por lo tanto $x \in V \cap V^\perp = V^o$. Esto prueba que $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}^o$.

Como ya se vio en la Proposición 1.18, se tiene que $V^o \subseteq \mathcal{N}$, por lo tanto $\mathcal{N} = V^0$. $\square$

DEFINICIÓN 1.20. Sea $(V, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal de V. Sea $x \in V$, si x admite una representación como $x = y + z$, con $y \in W$ y $z \in W^{\perp}$, se dice que y es una *proyección ortogonal* de x sobre W.

PROPOSICIÓN 1.21. *Sea $(V, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal en V. Si $x \in V$ y existen dos proyecciones ortogonales y_1 y y_2 de x sobre W, entonces estas difieren en un vector isotrópico.*

DEMOSTRACIÓN. Sean y_1 y y_2 proyecciones ortogonales de x sobre W, entonces existen $z_1 \in W^{\perp}$ y $z_2 \in W^{\perp}$ tales que

$$x = y_1 + z_1, \qquad x = y_2 + z_2.$$

Por lo tanto

$$y_1 - y_2 = z_2 - z_1.$$

Sea

$$w = z_2 - z_1.$$

Se probará que $w \in W^0$.

En efecto y_1 y y_2 están en W, el cual es una variedad lineal en V. Entonces $y_1 - y_2 \in W$. Luego $z_2 - z_1 \in W$. Además $z_1, z_2 \in W^{\perp}$ entonces

$$[z_1, w] = 0 \qquad \text{y} \qquad [z_2, w] = 0 \qquad \text{para todo } x \in W,$$

por lo tanto

$$[z_2 - z_1, w] = [z_1, w] - [z_2, w] = 0 + 0 = 0$$

entonces $z_2 - z_1 \in W^{\perp}$. De donde

$$z_2 - z_1 \in W \cap W^{\perp} = W^0.$$

□

TEOREMA 1.22. *Sea $(\mathfrak{R}, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno y $\mathcal{L}$ una variedad lineal de $\mathfrak{R}$.*

(a) *Si $\mathcal{L}$ es no degenerado entonces los elementos de $\mathfrak{R}$ tienen a lo sumo una proyección sobre $\mathcal{L}$.*
(b) *Si existe un elemento en $\mathfrak{R}$ que tiene exactamente una proyección sobre la variedad lineal $\mathcal{L}$ entonces $\mathcal{L}$ es no degenerado.*

Demostración.

a) Sean $x \in \mathfrak{R}$ y y_1, y_2 proyecciones de x sobre $\mathcal{L}$, entonces existen $z_1, z_2 \in \mathcal{L}^\perp$ tales que

$$x = y_1 + z_1 \quad x = y_2 + z_2$$

Luego $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$. Pero es claro que $y_1 + (-y_2) \in \mathcal{L}$ y $z_1 + (-z_2) \in \mathcal{L}^\perp$ por tanto $y_1 - y_2 \in \mathcal{L}^0 = \{0\}$, esto indica que $y_1 = y_2$.

b) Sea $x \in \mathfrak{R}$ tal que tiene exactamente una proyección sobre $\mathcal{L}$ y esta es y, entonces existe $z \in \mathcal{L}^\perp$ tal que $x = y + z$.

Supongamos que $\mathcal{L}$ es degenerado, entonces existe $z_0 \neq 0$ tal que $z_0 \in \mathcal{L}^0 = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^\perp$. Como

$$x = y + z = y + z + 0 = (y + z_0) + (z - z_0)$$

se sigue que $y + z_0 \neq y$. Esta es la proyección de x sobre $\mathcal{L}$, lo cual es absurdo. $\square$

Definición 1.23. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal de V. Se dice que W es *orto-complementada* cuando todo $x \in V$ se puede escribir como $x = y + z$, con $y \in W$ y $z \in W^\perp$.

En este caso escribimos

$$V = cl\{W, W^\perp\} \qquad \text{ó} \qquad V = \bigvee\{W, W^\perp\}.$$

Teorema 1.24. *Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal en V. Todo vector de V tiene una proyección sobre W si y sólo si W es orto-complementado. En particular, cuando W es no degenerado se tiene que todo vector de V tiene una única proyección sobre W si y sólo si $W = W \,[\dot{+}]\, W^\perp$.*

Demostración. Supongamos que W es orto-complementado, esto es $V = cl\{W, W^\perp\}$. Sea $x \in V$, entonces existen $y \in W$, $z \in W^\perp$ tales que $x = y + z$. Por lo tanto y es una proyección de x sobre W.

Supongamos que todo vector de V tiene una proyección sobre W. Si $x \in V$, entonces existen $y \in W$ y $z \in W^\perp$ tales que $x = y + z$, entonces $x \in cl\{W, W^\perp\}$. Por lo tanto $V \subseteq cl\{W, W^\perp\}$.

Es claro que $cl\{W, W^\perp\} \subseteq V$, por lo tanto $V = cl\{W, W^\perp\}$.

Si W es no degenerado entonces

$$W \cap W^\perp = W^0 = \{0\}.$$

Por lo tanto

$$cl\{W, W^{\perp}\} = W\,[\dot{+}]\,W^{\perp}.$$

□

3. Operadores lineales en espacios con métrica indefinida

DEFINICIÓN 1.25. Un *operador lineal* T de un espacio vectorial V_1 en un espacio vectorial V_2 es una aplicación definida en una variedad lineal $\mathrm{Dom}(T) \subseteq V_1$ y a valores en V_2 tal que:

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$$

para cualquier $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. La variedad lineal $\mathrm{Dom}(T) \subseteq V_1$ es el *dominio* de T y la variedad lineal $T(\mathrm{Dom}(T)) = \mathrm{Ran}(T)$, es el *rango* de T.

Si $V_1 = V_2 = V$, decimos que T es un operador lineal en V.

DEFINICIÓN 1.26. Un operador lineal T en $(V, [\cdot,\cdot])$ es *simétrico* si

$$[T(x), y] = [x, T(y)]$$

para todo $x, y \in \mathrm{Dom}(T)$.

DEFINICIÓN 1.27. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno. Un operador T en V es *isométrico* si

$$[T(x), T(y)] = [x, y]$$

para todo $x, y \in \mathrm{Dom}(T)$.

PROPOSICIÓN 1.28. *Todo operador isométrico cuyo dominio es no degenerado es invertible.*

DEMOSTRACIÓN. Si $Tx = 0$, entonces para cualquier $y \in \mathrm{Dom}(T)$ tenemos

$$[x, y] = [T(x), T(y)] = [0, T(y)] = 0$$

debe ser $x = 0$. Así x es ortogonal a $\mathrm{Dom}(T)$.

Como $\mathrm{Dom}(T)$ es no degenerado, entonces T es invertible. □

DEFINICIÓN 1.29. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno, si T es un operador isométrico en V tal que $\mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Ran}(T) = V$, se dice que T es *unitario.*

DEFINICIÓN 1.30. Sea T operador lineal en V y W una variedad lineal en V, se dice que W es T-*invariante* (o *invariante* por T) si $T(W \cap \mathrm{Dom}(T)) \subseteq W$.

PROPOSICIÓN 1.31. *Si T es un operador isométrico en $(V, [\cdot,\cdot])$ y $W \subseteq V$ es una variedad lineal tal que $W \subseteq T(W \cap \mathrm{Dom}(T))$, entonces $W^{\perp}$ es invariante por T.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in W^{\perp}$ entonces

$$\{[T(x), W]\} \subseteq \{[T(x), T(W \cap \mathrm{Dom}(T))]\} = \{[x, W \cap \mathrm{Dom}(T)]\} = \{[x, W]\} = \{0\}.$$

□

PROPOSICIÓN 1.32. *Si T es un operador simétrico en $(V, [\cdot,\cdot])$ y $W \subseteq \mathrm{Dom}(T)$ es invariante por T, entonces lo es $W^{\perp}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in W^{\perp}$ entonces

$$[T(x), W] = [x, T(W)]$$

como $TW \subseteq W$, entonces

$$\{[x, T(W)]\} \subseteq \{[x, W]\} = \{0\}.$$

□

DEFINICIÓN 1.33. Sean T_1 y T_2 operadores lineales en V con $\mathrm{Dom}(T_1) = \mathrm{Dom}(T_2) = V$, se dice que T_1 y T_2 *conmutan* cuando

$$T_1 T_2 = T_2 T_1.$$

DEFINICIÓN 1.34. Sea $U \in L(\mathfrak{R})$ y E una variedad lineal en $\mathfrak{R}$, se dice que E es U-*invariante* cuando $UE \subseteq E$. Se dice que E *reduce* a U si E y $E^{\perp}$ son $U-$invariantes.

DEFINICIÓN 1.35. Se dice que una descomposición en suma directa

$$V = \pounds_1 \,[\dot{+}]\, \pounds_2 \,[\dot{+}]\, \pounds_3 \,[\dot{+}] \ldots [\dot{+}]\, \pounds_n$$

reduce a T si:

(1) $\pounds_1, \pounds_2, \pounds_3, \ldots, \pounds_n$ son $T-$invariantes.
(2) $\mathrm{Dom}(T) = (\mathrm{Dom}(T) \cap \pounds_1) \,[\dot{+}]\, (\mathrm{Dom}(T) \cap \pounds_2) \,[\dot{+}] \ldots [\dot{+}]\, (\mathrm{Dom}(T) \cap \pounds_n)$.

En este caso T es suma directa de $T \mid \pounds_1, T \mid \pounds_2, T \mid \pounds_3, \ldots, \mid \pounds_n$.

DEFINICIÓN 1.36. P es un *proyector ortogonal* en $(V, [\cdot,\cdot])$ si su dominio es V, P es isométrico y $P^2 = P$

Observación 3. Si $(V, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal en V, tal que W es ortocomplementado y no degenerado, entonces todo vector de V tiene una única proyección sobre W. La aplicación $P_W : V \to W$ dada por

$$P_W(x) = y$$

donde y es la proyección ortogonal de x sobre W está bien definida y es lineal. Además es fácil ver que es un proyector ortogonal.

Teorema 1.37. *Si P es un proyector ortogonal en $(V, [\cdot, \cdot])$, entonces el rango de P es ortocomplementado y para cada $x \in V$, P_x es la proyección del rango de P sobre W. Si además W es no degenerado y ortocomplementado, entonces P_W es un proyector ortogonal y* $\operatorname{Ran}(P) = W$.

Demostración. Sea $x \in V$, entonces podemos escribir

$$x = P_x + (x - P_x).$$

Además como $P_x = P(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
[x - P_x, P_y] &= [P(x - P_x), P_y] \\
&= \left[Px - P_x^2, y\right] \\
&= [Px - P_x, y] \\
&= [0, y] \\
&= 0
\end{aligned}$$

para todo $y \in V$.

De donde

$$V = cl\{\operatorname{Ran}(P), (\operatorname{Ran}(P))^{\perp}\},$$

esto es $\operatorname{Ran}(P)$ es ortocomplementado y P_x es la proyección de x sobre $\operatorname{Ran}(P)$.

Por otro lado si $x, y \in V$, existen $u, z \in W^{\perp}$ tales que

$$x = P_W(x) + u \quad \text{y} \quad x = P_W(x) + z.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
[P_W(x), y] &= [P_W(x), P_W(y) + z] \\
&= [P_W(x), P_W(y)] + [P_W(x), z] \\
&= [P_W(x), P_W(y)] + 0.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}[P_W(x), y] &= [P_W(x), P_W(y)] \\ &= \left[x, P_W^2(y)\right] = [x, P_W(y)]\,.\end{aligned}$$

Sea $w \in W$

$$\begin{aligned}\left[P_W(x) - P_W^2(y), w\right] &= [P_W(x - P_G(x)), w] \\ &= [x - P_W x), P_W(w)] \\ &= [w, P_W(w)] = 0.\end{aligned}$$

Entonces

$$P_W(x) - P_W^2(y) \in W \cap W^{\perp}$$

$\mathcal{N}^0 = \{0\}$ y W es no degenerado, luego

$$P_W = P_W^2.$$

Si vale que $V = V^0\,[+]\,V_1$, entonces $V = V^0\,[\dot{+}]\,V_1$, de modo que V_1 es no degenerado y ortocomplementado, así $P_V = P_{V_1}$, entonces P es proyector ortogonal con $\mathrm{Ran}(P) = V_1$ y además

$$[P(x), P(y)] = [x, y]$$

para todo x, y en V por lo tanto P es isométrico. □

Definición 1.38. Decimos que $(V, [\cdot,\cdot])$ es *descomponible* si admite una representación de la forma

$$V = V^0\,[\dot{+}]\,V^+\,[\dot{+}]\,V^-, \qquad V^+ \subseteq \mathbf{B}^{++}, \qquad V^- \subseteq \mathbf{B}^{--},$$

donde V^0 es la parte isotrópica de V, V^-, V^+ son variedades lineales. Toda descomposición como la anterior recibe el nombre de *descomposición fundamental*.

Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno,

$$V = \mathcal{W}^0\,[\dot{+}]\,\mathcal{W}^+\,[\dot{+}]\,\mathcal{W}^- \qquad \text{con} \quad W^+ \subseteq \mathbf{B}^{++}, \quad W^- \subseteq \mathbf{B}^{--} \quad \text{y} \quad \mathcal{W}^0 \subseteq \mathcal{W}$$

entonces $\mathcal{W}^0 = V^0$.

Donde W es un subconjunto de V .

Proposición 1.39. *Toda descomposición fundamental de un espacio con producto interno indefinido, descomponible y no degenerado* $(V, [\cdot,\cdot])$ *es de la forma*

$$V = V^+\,[\dot{+}]\,V^- \qquad \textit{con} \quad V^+ \subseteq \mathbf{B}^{++}, \qquad V^- \subseteq \mathbf{B}^{--},$$

$(\mathcal{N}^0)^0 = \mathcal{N}^0 \cap (\mathcal{N}^0)^{\perp} = \mathcal{N}^0$ *y* $(\mathcal{N}^0)^{\perp} = \mathcal{N}^0$.

Observación 4. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido, descomponible y no degenerado tal que

$$V = V^+ \,[\dot{+}]\, V^- \qquad \text{con} \qquad V^+ \subseteq \mathbf{B}^{++}, \quad V^- \subseteq \mathbf{B}^{--}$$

entonces los proyectores $P^\pm : V \to V^\pm$ dados por

$$P^\pm(x) = x^\pm$$

están bien definidos y son proyectores ortogonales.

Definición 1.40. Los operadores $P^\pm : V \to V^\pm$ de la observación anterior se llaman *proyectores fundamentales* y

$$J = P^+ - P^-$$

se llama *simetría fundamental.*

Observación 5. P^+, P^- y por lo tanto J están asociados a la descomposición fundamental.

Si $x \in V = V^+ \,[\dot{+}]\, V^-$, entonces

$$x = x^+ + x^- = P^+(x) + P^-(x)$$

y

$$J(x) = (P^+ - P^-)(x) = P^+(x) - P^-(x) = x^+ - x^-.$$

Luego

$$x = P^+(x) + P^-(x)$$

y

$$J(x) = P^+(x) - P^-(x),$$

entonces

$$J(x) + x = 2P^+(x)$$

Por lo tanto

$$P^+ = \frac{J+I}{2},$$

en forma similar se obtiene que

$$P^- = \frac{I-J}{2}.$$

Por lo tanto de que

$$\left[P^+(x), P^-(x)\right] = 0$$

se sigue que $J^2 = I$.

Además J es isométrico, en efecto,

$$\begin{aligned}
[J(x), y] &= \left[x^+ - x^-, y\right] = \left[x^+, y\right] - \left[x^-, y\right] \\
&= \left[x^+, y^+\right] + \left[x^+, y^-\right] - \left[x^-, y^+\right] - \left[x^-, y^-\right] \\
&= \left[x^+, y^+\right] + \left[x^-, y^-\right] \\
&= \left[x^+, y^+\right] + \left[x^+, -y^-\right] + \left[x^-, -y^+\right] + \left[x^+, -y^-\right] \\
&= \left[x^+, y^+ - y^-\right] + \left[x^-, y^+ - y^-\right] \\
&= \left[x^+ + x^-, y^+ - y^-\right] \\
&= [x, J(y)]
\end{aligned}$$

Si $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y $[\cdot,\cdot]_J =: V \times V \to \mathbb{C}$ dada por

$$[x, y]_J = [J(x), y]$$

Observación 6. J es J-isométrico, en efecto,

$$[J(x), J(y)]_J = [JJ(x), J(y)] = [x, J(y)] = [J(x), y] = [x, y]_J$$

Entonces para todo $x, y \in V$ tenemos que

$$\begin{aligned}
[x, y]_J &= [Jx, y] \\
&= \left[x^+ - x^-, y^+ + y^-\right] \\
&= \left[x^+, y^+ + y^-\right] - \left[x^-, y^+ + y^-\right] \\
&= \left[x^+, y^+\right] + \left[x^+, y^-\right] - \left[x^-, y^+\right] - \left[x^-, y^-\right] \\
&= \left[x^+, y^+\right] - \left[x^-, y^-\right] \geq 0.
\end{aligned}$$

A la función $[\cdot,\cdot]_J : V \times V \to C$, se le llama *$J$-producto interno* y $\|\cdot\|_J$ se le llama *J-norma.*

Proposición 1.41. *Si J es la simetría fundamental asociada a la descomposición $V = V^+ [\dot{+}] V^-$, entonces $[v^+, v^-]_J = 0$.*

Demostración. Como $[v^+, 0] = 0$ y $[0, v^-] = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left[v^+, v^-\right]_J &= \left[v^+ + 0, v^- + 0\right]_J \\
&= \left[v^+, 0\right] - \left[0, v^-\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

TEOREMA 1.42. *Sea* $(V, [\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno y* J *es la simetría fundamental. Si* $[\cdot,\cdot]_J : V \times V \to \mathbb{C}$ *está dada por*

$$[x, y]_J = [J(x), y]$$

entonces

$$|\,[x, y]\,| \le \|x\|_J \|y\|_J.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
|\,[x, y]\,| &= |\,\left[x^+, y\right] + \left[x^-, y\right]\,| \\
&\le |\,\left[x^+, y^+\right]\,| + |\,\left[x^-, y^-\right]\,| \\
&\le \left[x^+, x^+\right]^{\frac{1}{2}} \left[y^+, y^+\right]^{\frac{1}{2}} + (-\left[x^-, x^-\right])^{\frac{1}{2}}(-\left[y^-, y^-\right])^{\frac{1}{2}} \\
&\le \left(\left[x^+, x^+\right]^{\frac{1}{2}} - \left[x^-, x^-\right]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left[y^+, y^+\right]^{\frac{1}{2}} - \left[y^-, y^-\right]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x\|_J \|y\|_J.
\end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 1.43. Sean $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno, U y W variedades lineales de V. Decimos que U y W son *compañeros duales* si

$$U \cap W^\perp = \{0\} = U^\perp \cap W.$$

Y notamos que $U \neq W$

Obsérvese que si W es no degenerado entonces

$$W^\perp \cap W = W^0 = \{0\}.$$

Por lo tanto $W^\perp \neq W$.

DEFINICIÓN 1.44. Un espacio con producto interno $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ que admite una descomposición fundamental de la forma

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^+ \,[\dot{+}]\, \mathfrak{R}^-, \qquad \mathfrak{R}^+ \subseteq \beta^{++}, \qquad \mathfrak{R}_2^- \subseteq \beta^{--}$$

con $(\mathfrak{R}^+, [\cdot,\cdot])$ y $(\mathfrak{R}^-, -[\cdot,\cdot])$ espacios de Hilbert, recibe el nombre de *espacio de Krein*.

EJEMPLO 1.45. Consideremos $(\mathbb{R}^2, +)$ con la suma usual, y $[\cdot,\cdot] : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = x_1 x_2 - y_1 y_2.$$

Ya se probó que esta función así definida es un producto interno.

Sean

$$\mathfrak{K}^+ = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{K}^- = \{(0,x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Sean $u \in \mathfrak{K}^+$ y $v \in \mathfrak{K}^-$ entonces existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $u = (x,0) \in \mathfrak{K}^+$ y $v = (0,y) \in \mathfrak{K}^-$ luego

$$[u,v] = [(x,0),(0,y)] = x0 - 0y = 0$$

de donde $\mathfrak{K}^+ \perp \mathfrak{K}^-$.

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$(x,y) = (x,0) + (0,y).$$

De lo anterior $\mathbb{R}^2 = \mathfrak{K}^+ [\dot{+}] \mathfrak{K}^-$ y es fácil ver que $(\mathfrak{K}^+, [\cdot,\cdot])$ y $(\mathfrak{K}^-, -[\cdot,\cdot])$ son espacios de Hilbert, por lo tanto $(\mathbb{R}^2, [\cdot,\cdot])$ es un espacio de Krein.

Note que $u = (x,0) \in \mathfrak{K}^+$ implica

$$[u,u] = [(x,0),(x,0)] = xx - 00 = x^2 \geq 0$$

y $v = (0,y) \in \mathfrak{K}^-$ luego

$$-[v,v] = -[(0,y),(0,y)] = -(00 - yy) = y^2 \geq 0.$$

Si $\{(x_n,0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de puntos en $\mathfrak{K}^+$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n,0) = (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

entonces $y = 0$. Luego $(x,y) \in \mathfrak{K}^+$. Por lo tanto $\mathfrak{K}^+$ es cerrado.

Análogamente se ve que $\mathfrak{K}^-$ es cerrado.

Observación 7. Los espacios de Krein son no degenerados.

Sea $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein. Tal como se dijo antes este espacio es no degenerado y descomponible. Por lo tanto existen los proyectores ortogonales $P^\pm : \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}^\pm$ dados por

$$P^\pm(x) = x^\pm$$

y la simetría fundamental $J = P^+ - P^-$ asociada en forma natural.

Sea $[\cdot,\cdot]_J : \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \to \mathbb{C}$ dada por

$$[x,y]_J = [J(x), y]$$

Consideremos el espacio de Hilbert asociado $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]_J)$.

Así dado un espacio de Krein $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$, se le puede asociar un espacio de Hilbert $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$. Por otro lado, si $(H, [\cdot, \cdot])$ es un espacio de Hilbert, entonces podemos verlo como un espacio de Krein de la forma

$$H = H\,[\dot{+}]\,\{0\}.$$

Teorema 1.46. *Sea* $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$ *un espacio de Krein y sean*

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1^+\,[\dot{+}]\,\mathfrak{K}_1^-, \quad \mathfrak{K} = \mathfrak{K}_2^+\,[\dot{+}]\,\mathfrak{K}_2^-, \qquad con\ \mathfrak{K}_1^+, \mathfrak{K}_2^+ \subseteq \beta^{++}\ y\ \mathfrak{K}_1^-, \mathfrak{K}_2^- \subseteq \beta^{--}$$

dos descomposiciones fundamentales entonces:

$$\dim(\mathfrak{K}_1^+) = \dim(\mathfrak{K}_2^+) \qquad y \qquad \dim(\mathfrak{K}_1^-) = \dim(\mathfrak{K}_2^-).$$

Además si J_1 *y* J_2 *son las respectivas simetrías fundamentales entonces* $\|.\|_{J_1}$ *y* $\|.\|_{J_2}$*, son normas equivalentes.*

Este es un resultado clásico de espacios de Krein. La prueba puede verse en [**8**].

Tomando en cuenta el Teorema 1.46 tiene sentido hablar de

$$k^+ = \dim(\mathfrak{K}^+) \qquad \text{y} \qquad k^- = \dim(\mathfrak{K}^-)$$

cualquiera sea la descomposición fundamental del espacio de Krein.

Por el Teorema 1.46 dos descomposiciones fundamentales dan origen a normas equivalentes y por lo tanto dan origen a la misma topología. Esta topología es la que se conoce como *topología fuerte* del espacio de Krein.

En general, los conceptos de convergencia, continuidad, etc en un espacio de Krein se refieren a esta topología.

Definición 1.47. Sea $k = \text{mín}\{\mathfrak{K}^+, \mathfrak{K}^-\}$. Cuando k es finito se dice que $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$ es un *espacio de Pontryagin.*

Sea $T : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ un operador lineal. La definición del adjunto de T se hace de manera análoga a como se hace en espacios de Hilbert, usando la versión para espacios de Krein del teorema de representación de Riesz. Es decir, el adjunto de T es $T^{[*]} : \text{Dom}(T^{[*]}) \to \mathfrak{K}$ tal que

$$[T(x), y] = [x, T^{[*]}(y)]$$

para todo $x \in \text{Dom}(T)$, $y \in \text{Dom}(T^{[*]})$.

TEOREMA 1.48. *Sean* $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot])$ *un espacio de Krein,* T *un operador lineal en dicho espacio, dominio de* T *denso en* $\mathfrak{K}$. *Sea* J *una simetría fundamental en* $\mathfrak{K}$ *y* T^{*J} *el adjunto de* T *respecto al espacio de Hilbert* $(\mathfrak{K}, [\cdot, \cdot]_J)$, *entonces*

$$T^{[*]} = JT^{*J}J.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in \mathfrak{K}$ tales que $x \in \mathrm{Dom}(T^*)$ y $y \in \mathrm{Dom}(T)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left[JT^{[*]}(x), y\right]_J &= \left[T^{[*]}(x), J(y)\right] \\
&= [x, TJ(y)] \\
&= [J(x), TJ(y)]_J \\
&= \left[T^{*J}J(x), J(y)\right]_J \\
&= \left[T^{*J}J(x), y\right]_J
\end{aligned}$$

Por lo tanto $JT^{[*]} = T^{*J}J$ de donde $T^{[*]} = JT^{*J}J$ □

CAPíTULO 2

Transferencia de métricas inducidas por parejas de acopladores unitarios en espacios de *Hilbert*

1. Acopladores Unitarios en Espacios de Hilbert

En [**5**] Cotlar y Sadosky introdujeron la noción de métrica inducida por un acoplador unitario de isometrías y la utilizaron para obtener levantamientos de formas invariantes actuando en sistemas de dispersión (scattering systems) con uno o dos grupos de evolución. Esto fue hecho para espacios de Hilbert, en el próximo capítulo se darán versiones de estos resultados para espacios de Krein.

En este capítulo usaremos T^* para indicar el adjunto de un operador T, en el sentido usual de los espacios de Hilbert.

DEFINICIÓN 2.1. Sea H un espacio de Hilbert, un operador $T \in L(H)$ es llamado *semi-unitario* si T es una isometría con dominio H. Esto es

$$\langle T(h_1), T(h_2)\rangle = \langle h_1, h_2\rangle \qquad \text{para todo } h_1, h_2 \in H$$

Es decir,

$$TT^* = I.$$

DEFINICIÓN 2.2. Se dice que un operador $T \in L(H)$ es *unitario* cuando es isométrico y sobreyectivo. Es decir, cuando

$$T^*T = TT^* = I.$$

DEFINICIÓN 2.3. Sea $(H, \langle , \rangle)$ un espacio de Hilbert $T \in L(H) \quad W \subset H$ definimos

$$Lat(T) := \{W : T(W) \subset W\}$$

Siguiendo a Adamyam y Arov, Cotlar y Sadosky dieron la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.4. Sean N, N_1 y N_2 espacios de Hilbert tales que $N_1 \subset N$ y $N_2 \subset N$ como subespacios cerrados. Sean $T \in L(N)$, $T_1 \in L(N_1)$ y $T_2 \in L(N_2)$, se dice que T es un *acoplador unitario* de T_1 y T_2 cuando

(a) T es un operador unitario.

(b) $T \mid N_1 = T_1$.
(c) $T^{-1} \mid N_2 = T_2$

TEOREMA 2.5. *Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert, $U_1 \in L(H_1)$ y $U_2 \in L(H_2)$, dos operadores unitarios $N_1 \subset H_1$ y $N_2 \subset H_2$ dos subespacios invariantes esto es $U_1N_1 \subset N_1$ y $U_2N_2 \subset N_2$ tales que*

$$T_1 = U_1 \mid N_1 \quad \text{y} \quad T_2 = U_2 \mid N_2$$

son operadores semi unitarios en N_1 y N_2 respectivamente. Dado un acoplador unitario $T \in L(N)$ de T_1 y T_2, entonces existe un acoplador unitario $U \in L(H)$ de U_1 y U_2 tal que

$$\langle f_1, f_2 \rangle_H = \langle f_1, f_2 \rangle_N \qquad \text{para todo } f_1 \in N_1, f_2 \in N_2.$$

2. Levantamiento de formas esencialmente invariantes en sistemas de scattering para espacios de Hilbert

Decimos que

$$\left[H, W^+, W^-, \tau\right] \tag{2.1}$$

es un *sistema de scattering*, si H es un espacio de Hilbert, W^+ y W^- son subespacios de H, $\tau \in L(H)$ es unitario,

$$\tau(W^+) \subset W^+, \tau^{-1}(W^-) \subset W^- \text{ y } W^+ \perp W^-. \tag{2.2}$$

En este caso escribimos

$$H = V \oplus W^+ \oplus W^-. \tag{2.3}$$

El grupo $\{\tau^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es llamado *grupo de evolución* del sistema (2.1).

El espacio W^+ es llamado el *subespacio de entrada* y el espacio W^- es llamado el *subespacio de salida* del sistema (2.1).

Un subespacio V como el que se tiene en (2.3) para algunos W^+ y W^- que satisfacen (2.2) es llamado *semi-invariante*.

DEFINICIÓN 2.6. Dados dos sistemas de scattering $\left[H_1, W_1^+, W_1^-, \tau_1\right]$ y $\left[H_2, W_2^+, W_2^-, \tau_2\right]$. Una forma sesquilineal $\beta : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ es llamada *invariante respecto a los grupos de evolución de los sistemas*, cuando

$$\beta(\tau_1 f_1, \tau_2 f_2) = \beta(f_1, f_2) \qquad \text{para todo } (f_1, f_2) \in H_1 \times H_2 \tag{2.4}$$

o equivalentemente

$$\beta(\tau_1 f_1, f_2) = \beta(f_1, \tau_2^{-1} f_2) \qquad \text{para todo } (f_1, f_2) \in H_1 \times H_2.$$

Esta noción de invariancia sigue teniendo sentido cuando se define sobre $W_1^+ \times W_2^-$ (debido a la invariancia de los espacios de entrada y salida).

Se dice que $\beta : W_1^+ \times W_2^- \to \mathbb{C}$ es invariante cuando

$$\beta(\tau_1 w_1, w_2) = \beta(w_1, \tau_2^{-1} w_2) \qquad \text{para todo } (w_1, w_2) \in W_1^+ \times W_2^-.$$

También se consideran formas definidas sobre subespacios más generales V_1 y V_2, esto es

$$\beta : V_1 \times V_2 \to \mathbb{C}.$$

En este caso decimos que $\beta : V_1 \times V_2 \to \mathbb{C}$ es esencialmente invariante si

$$\beta(P_1 \tau_1 f_1, f_2) = \beta(f_1, P_2 \tau_2^{-1} f_2) \qquad \text{para todo } (f_1, f_2) \in V_1 \times V_2,$$

donde P_i es el proyector ortogonal de H_i en V_i, para $i = 1, 2$.

Retornando a la noción de acoplador unitario dada en la sección anterior. Se puede observar que si $T \in L(N)$ es un acoplador unitario de dos operadores unitarios $T_1 \in L(N_1)$ y $T_2 \in L(N_2)$, entonces el producto escalar de N da lugar a una forma sesquilineal acotada $\beta : N_1 \times N_2 \to \mathbb{C}$ definida por

$$\beta(f_1, f_2) = \langle f_1, f_2 \rangle_N \qquad \text{para todo } (f_1, f_2) \in N_1 \times N_2. \tag{2.5}$$

Donde se satisface que $\|\beta\| \leq 1$ y

$$\beta(\tau_1 f_1, f_2) = \beta(f_1, \tau_2 f_2) \qquad \text{para todo } (f_1, f_2) \in N_1 \times N_2. \tag{2.6}$$

Recíprocamente cualquier forma sesquilineal acotada $\beta : N_1 \times N_2 \to \mathbb{C}$, tal que $\|\beta\| \leq 1$, y que satisface (2.6) da lugar a un acoplador $T \in L(N)$ para el cual (2.5) se tiene.

En efecto como la forma es acotada se tiene

$$|\beta(f_1, f_2)| \leq \|f_1\|_{N_1} \|f_2\|_{N_2}$$

lo cual es equivalente a la condición

$$\langle (f_1, f_2), (f_1, f_2) \rangle \geq 0$$

donde

$$\langle (f_1, f_2), (g_1, g_2) \rangle := \langle (f_1, g_1) \rangle_{N_1} + \langle (f_2, g_2) \rangle_{N_2} + \beta(f_1, g_2) + \overline{\beta(g_1, f_2)}. \tag{2.7}$$

El semi producto escalar (2.7) da lugar a un espacio pre-Hilbert y la condición (2.6) nos dice que la aplicación

$$(f_1, f_2) \to (T_1 f_1, T_2^{-1} f_2)$$

es una isometría en este espacio, con dominio $N_1 \times T_2 N_2$ y rango $T_1 N_1 \times N_2$, la cual puede ser extendida al operador unitario T que buscamos en un espacio más grande N que contiene a N_1 y N_2.

Combinando estas observaciones con el primer teorema sobre acopladores unitarios, obtenemos el siguiente teorema de levantamiento para formas acotadas esencialmente invariantes definidas sobre subespacios semi-invariantes en sistemas de scattering.

TEOREMA 2.7. *Dado dos sistemas de scattering* $\left[H_1, W_1^+, W_1^-, \tau_1\right]$ *y* $\left[H_2, W_2^+, W_2^-, \tau_2\right]$, *sea*

$$V_i = H_i \ominus (W_i^+ \oplus W_i^-) = (W_i^+ \oplus W_i^-)^\perp \qquad (i = 1, 2).$$

Si $\beta_0 : V_1 \times V_2 \to \mathbb{C}$ *es una forma sesquilineal acotada esencialmente invariante tal que* $\|\beta_0\| \leq 1$, *entonces*

(1) *Existe una forma sesquilineal* $\beta : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ *con* $\|\beta\| \leq 1$, *invariante, tal que* $\beta = \beta_0$ *en* $V_1 \times V_2$.
(2) $\beta = 0$ *sobre* $W_1^+ \times W_2^-$, $V_1 \times W_2^-$ *y* $W_1^+ \times V_2$.

En el teorema anterior se entiende que β_0 es invariante en el sentido de (2.6) y β es invariante en el sentido usual de (2.4).

CAPíTULO 3

Extensión de formas sesquilineales en espacios con métrica indefinida

1. Levantamiento de formas esencialmente invariantes en sistemas de scattering para espacios de Krein

A continuación se introduce la noción de sistema de scattering en espacios de Krein.

DEFINICIÓN 3.1. Si $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot])$ es un espacio de Krein $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ [\dot{+}] \mathfrak{K}^-$ y $\tau \in L(\mathfrak{K})$ unitario,

$$\tau(\mathfrak{K}^+) \subset \mathfrak{K}^+ \quad \text{y} \quad \tau(\mathfrak{K}^-) \subset \mathfrak{K}^-$$

diremos $[\mathfrak{K}, \mathfrak{K}^+, \mathfrak{K}^-, \tau]$ es un *sistema de scattering en el espacio de Krein* $\mathfrak{K}$.

Los subespacios $\mathfrak{K}^+, \mathfrak{K}^-$, en la descomposición anterior son llamados subespacios de entrada y salida respectivamente.

A la sucesión $\{\tau^n : n \in \mathbb{Z}\}$ la llamaremos J-grupo de evolución del sistema.

OBSERVACIÓN 8. Se puede notar que $T\mathfrak{K}^+ \subset \mathfrak{K}^+$ y $T\mathfrak{K}^- \subset \mathfrak{K}^-$ implican $T^{-1}\mathfrak{K}^- \subset \mathfrak{K}^-$. En efecto, supongamos que existe $k^- \in \mathfrak{K}^- \setminus \{0\}$ tal que $\tau^{-1}k^- = w^+$, con $w^+ \in \mathfrak{K}^+$ entonces existe $k^+ \in \mathfrak{K}^+$ tal que $\tau w^+ = k^+$, luego por ello

$$\begin{aligned} k^- &= \tau\tau^{-1}k^- \\ &= \tau w^+ \\ &= k^+ \end{aligned}$$

Lo cual es absurdo, luego lo supuesto no es válido. Por ende se tiene lo asegurado.

DEFINICIÓN 3.2. Dados dos sistemas de scattering en espacios de Krein $\left[\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_1^+, \mathfrak{K}_1^-, \tau_1\right]$ y $\left[\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_2^+, \mathfrak{K}_2^-, \tau_2\right]$. Una forma sesquilineal $\mathcal{B} : \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2 \to \mathbb{C}$ es llamada *invariante respecto a los grupos de evolución de los sistemas*, si satisface

$$\mathcal{B}(\tau_1 k_1, \tau_2 k_2) = \mathcal{B}(k_1, k_2), \qquad \text{para todo } (k_1, k_2) \in \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2.$$

Seguidamente se da una definición similar para ciertos subespacios.

DEFINICIÓN 3.3. Dados dos sistemas de scattering en espacios de Krein $\left[\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_1^+, \mathfrak{K}_1^-, \tau_1\right]$ y $\left[\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_2^+, \mathfrak{K}_2^-, \tau_2\right]$. Una forma sesquilineal $\mathcal{B} : \mathfrak{K}_1^+ \times \mathfrak{K}_2^- \to \mathbb{C}$ es *esencialmente invariante* cuando

$$\mathcal{B}(\tau_1 k_1, \tau_2 k_2) = \mathcal{B}(k_1, k_2) \qquad \text{para todo } (k_1, k_2) \in \mathfrak{K}_1^+ \times \mathfrak{K}_2^-.$$

OBSERVACIÓN 9. La igualdad de la Definición 3.2 puede ser sustituida por

$$\mathcal{B}(\tau_1 k_1, k_2) = \mathcal{B}(k_1, \tau_2^{-1} k_2) \tag{3.1}$$

En efecto, si $\mathcal{B}(\tau_1 k_1, k_2) = \mathcal{B}(k_1, \tau_2^{-1} k_2)$ entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\tau_1 k_1, \tau_2 k_2) &= \mathcal{B}(k_1, \tau_2^{-1} \tau_2 k_2) \\ &= \mathcal{B}(k_1, k_2) \end{aligned}$$

Recíprocamente también

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\tau_1 k_1, k_2) &= \mathcal{B}(\tau_1 k_1, \tau_2 \tau_2^{-1} k_2) \\ &= \mathcal{B}(k_1, \tau_2^{-1} k_2) \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 3.4. *Dado un sistema de scattering* $[\mathfrak{K}, \mathfrak{K}^+, \mathfrak{K}^-, \tau]$ *en el espacio de Krein* $\mathfrak{K}$ *se cumple que*

$$\mathcal{P}^+ \tau = \tau \mathcal{P}^+.$$

DEMOSTRACIÓN.
Sea $k \in \mathfrak{K}$ luego

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^+ \tau k &= \mathcal{P}^+ \tau (k^+ + k^-) \\ &= \mathcal{P}^+ \left(\tau k^+ + \tau k^-\right) \\ &= \mathcal{P}^+ \left(\tau k^+\right) + \mathcal{P}^+ \left(\tau k^-\right) \\ &= \tau k^+ + 0 \\ &= \tau \mathcal{P}^+ k^+ \\ &= \tau \left(\mathcal{P}^+ k^+ + 0\right) \\ &= \tau \left(\mathcal{P}^+ k^+ + \mathcal{P}^+ k^-\right) \\ &= \tau \left(\mathcal{P}^+ \left(k^+ + k^-\right)\right) \\ &= \tau \mathcal{P}^+ k \end{aligned}$$

$\square$

TEOREMA 3.5. *Sean* $\left[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_1^+, \mathfrak{R}_1^-, \tau_1\right]$ *y* $\left[\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_2^+, \mathfrak{R}_2^-, \tau_2\right]$ *dos sistemas de scattering en espacios de Krein. Si* $\mathcal{B}_0 : \mathfrak{R}_1^+ \times \mathfrak{R}_2^- \to C$ *Es una forma esencialmente invariante tal que* $\|\mathcal{B}_0\| \leq 1$, *entonces existe una forma invariante* $\mathcal{B} : \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \to C$ *que extiende a* $\mathcal{B}_0$, *tal que* $\|\mathcal{B}\| \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $P_i^\pm$ los proyectores ortogonales de $\mathfrak{R}_i$ sobre los $\mathfrak{R}_i^\pm$, $\ i = 1, 2$. De la Proposición 3.4 se tiene que

$$P_1^+ \tau_1 = \tau_1 P_1^+ \quad \text{y} \quad P_2^- \tau_2 = \tau_2 P_2^-.$$

Sea $\mathcal{B} : \mathfrak{R}_1^+ \times \mathfrak{R}_2^- \to \mathbb{C}$, tal que

$$B(k_1, k_2) = B_0(P_1^+ k_1, P_2^- k_2) \tag{3.2}$$

Se puede notar que $P_1^+ k_1 \in \mathfrak{R}_1^+$ y $P_2^- k_2 \in \mathfrak{R}_2^-$.

Veamos que $\mathcal{B}$ es una forma sesquilineal.
Sea $(k_1, k_2) \in \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$, $k_1^* \in \mathfrak{R}_1$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ luego

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(k_1 + k_1^*, k_2) &= \mathcal{B}_0(\mathcal{P}_1^+(k_1 + k_1^*), \mathcal{P}_2^-(k_2)) \\
&= \mathcal{B}_0((\mathcal{P}_1^+(k_1) + \mathcal{P}_1^+(k_1^*)), \mathcal{P}_2^-(k_2)) \\
&= \mathcal{B}_0(\mathcal{P}_1^+(k_1), \mathcal{P}_2^-(k_2))) + \mathcal{B}_0(\mathcal{P}_1^+(k_1^*), \mathcal{P}_2^-(k_2)) \\
&= \mathcal{B}(k_1, k_2) + \mathcal{B}(k_1^*, k_2)
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\alpha k_1, k_2) &= \mathcal{B}_0(\mathcal{P}_1^+(\alpha k_1), \mathcal{P}_2^-(k_2)) \\
&= \mathcal{B}_0(\alpha \mathcal{P}_1^+(k_1), \mathcal{P}_2^-(k_2)) \\
&= \mathcal{B}_0(\alpha \mathcal{P}_1^+(k_1), \mathcal{P}_2^-(k_2)) \\
&= \alpha \mathcal{B}_0(\mathcal{P}_1^+(k_1), \mathcal{P}_2^-(k_2)) \\
&= \alpha \mathcal{B}(k_1, k_2)
\end{aligned}$$

Ahora si $(k_1^+, k_2^-) \in \mathfrak{R}_1^+ \times \mathfrak{R}_2^-$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(k_1^+, k_2^-) &= \mathcal{B}_0(P_1^+(k_1^+), P_2^-(k_2^-)) \\
&= \mathcal{B}_0(k_1^+, k_2^-)
\end{aligned}$$

Así $\mathcal{B}|_{\mathfrak{R}_1^+ \times \mathfrak{R}_2^-} = \mathcal{B}_0$.

Dicho esto, $\mathcal{B}$ así definida es invariante. En efecto, si $(k_1, k_2) \in \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\tau_1 k_1, k_2) &= \mathcal{B}_0(P_1^+ \tau_1(k_1), P_2^-(k_2))\\ &= \mathcal{B}_0(\tau_1 P_1^+(k_1), P_2^-(k_2))\\ &= \mathcal{B}_0(P_1^+(k_1), \tau_2^{-1} P_2^-(k_2))\\ &= \mathcal{B}_0(P_1^+(k_1), P_2^- \tau_2^{-1}(k_2))\\ &= \mathcal{B}(k_1, \tau_2^{-1} k_2)\end{aligned}$$

Además se puede ver fácilmente que

$$\|\mathcal{B}\| \leq 1.$$

□

2. Transferencia de productos internos en espacios con métrica indefinida

TEOREMA 3.6. *Si* $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ *es un espacio de Krein,* J *la simetría fundamental asociada a la descomposición* $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1^+ [\dot{+}] \mathfrak{R}_1^-$, $T \in L(\mathfrak{R})$, *si* $\mathfrak{R}^+$ *y* $\mathfrak{R}^-$ *son* T*-invariantes, entonces*

$$TJ = JT.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \mathfrak{R}$ entonces $x = x^+ + x^-$; con $x^+ \in \mathfrak{R}^+, x^- \in \mathfrak{R}^-$.
Luego

$$\begin{aligned}TJ(x) &= TJ\left(x^+ + x^-\right)\\ &= T\left(x^+ - x^-\right)\\ &= T\left(x^+\right) - T\left(x^-\right)\\ &= J\left(T\left(x^+\right) + T\left(x^-\right)\right)\\ &= JT\left(x^+ + x^-\right)\\ &= JT(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto $TJ = JT$. □

Ahora damos una condición suficiente para que un operador T pase de ser unitario en el espacio de Krein, a ser unitario en el espacio de Hilbert asociado a una simetría fundamental dada y viceversa. Más exactamente tenemos.

PROPOSICIÓN 3.7. *Sea* $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ *un espacio de Krein, con* J *la simetría fundamental asociada ala descomposición* $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1^+ [\dot{+}] \mathfrak{R}_1^-$, *y* $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot]_J)$ *el espacio de Hilbert asociado,* $\mathfrak{R}^+$ *y* $\mathfrak{R}^-$ T*-invariantes. Las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) $[T(x), T(y)]_J = [x, y]_J$ *para todo* $x, y \in \mathfrak{R}$.

(b) $[T(x), T(y)] = [x, y]$ *para todo* $x, y \in \mathfrak{K}$.

Demostración.

Como $T(\mathfrak{K}^+) \subset \mathfrak{K}^+$ y $T(\mathfrak{K}^-) \subset \mathfrak{K}^-$, el Teorema 3.6 nos garantiza que $JT = TJ$. Ahora si

$$[T(x), T(y)] = [x, y]$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned}
[T(x), T(y)]_J &= [JT(x), T(y)] \\
&= [TJ(x), T(y)] \\
&= [J(x), (y)] \\
&= [x, y]
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que T es J-unitario, esto es,

$$[T(x), T(y)]_J = [x, y]_J.$$

Luego

$$\begin{aligned}
[T(x), T(y)] &= [JT(x), T(y)]_J \\
&= [TJ(x), T(y)]_J \\
&= [J(x), y]_J \\
&= [x, y]
\end{aligned}$$

□

La idea de transferencia dada anteriormente nos motivó a estudiar los acopladores unitarios en espacios de Krein.

Definición 3.8. Sean $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$ y $\mathfrak{K}_2$ espacios de *Krein* tales que $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}$ y $\mathfrak{K}_2 \subset \mathfrak{K}$ como subespacios cerrados. Sean $T \in L(\mathfrak{K})$, $T_1 \in L(\mathfrak{K}_1)$ y $T_2 \in L(\mathfrak{K}_2)$, se dice que T es un *acoplador unitario* de T_1 y T_2 cuando

(a) T es un operador unitario.
(b) $T \mid \mathfrak{K}_1 = T_1$.
(c) $T^{-1} \mid \mathfrak{K}_2 = T_2$

Ahora damos una condición suficiente para que un J-acoplador unitario de un par de operadores en un espacio de Krein, pase a ser un acoplador unitario en los respectivos espacios de Hilbert asociados. Más exactamente tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.9. *Sean $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}$ espacios de Krein si $T \in L((\mathfrak{K},[,]))$, es un acoplador de $T_1 \in L((\mathfrak{K}_1,[,]_1))$ y $T_2 \in L((\mathfrak{K}_2,[,]_2))$, si $\mathfrak{K}^+$ y $\mathfrak{K}^-$ T-invariantes, entonces $T \in L(\mathfrak{K},[\cdot,\cdot]_J)$ es un acoplador unitario de $T_1 \in L\left(\mathfrak{K}_1,[\cdot,\cdot]_{J_1}\right)$ y $T_2 \in L\left(\mathfrak{K}_2,[\cdot,\cdot]_{J_2}\right)$.*

DEMOSTRACIÓN.

La proposición anterior nos garantiza que T es unitario en el espacio de Hilbert $\left(\mathfrak{K},[\cdot,\cdot]_{J_{\mathfrak{K}}}\right)$. Así $T \in L\left(\mathfrak{K},[\cdot,\cdot]_{J_{\mathfrak{K}}}\right)$ es unitario,

$$\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}, \mathfrak{K}_2 \subseteq \mathfrak{K} \quad \text{y} \quad T \mid \mathfrak{K}_1 = T_1 \quad \text{y} \quad T^{-1} \mid \mathfrak{K}_2 = T_2.$$

Luego $T \in L\left(\mathfrak{K},[\cdot,\cdot]_{J_{\mathfrak{K}}}\right)$ es un acoplador unitario de los operadores $T_1 \in L\left(\mathfrak{K}_1,[\cdot,\cdot]_{J_1}\right)$ y $T_2 \in L\left(\mathfrak{K}_2,[\cdot,\cdot]_{J_2}\right)$. □

Ahora mostramos, como la existencia de un acoplador nos permite transferir los productos internos indefinidos y como consecuencia las normas asociadas al par de simetrías fundamentales del par de espacios de Krein dados.

TEOREMA 3.10. *Sean $\mathfrak{K}_1$ y $\mathfrak{K}_2$ espacios de Krein, $U_1 \in L((\mathfrak{K}_1,[\cdot,\cdot]_1))$ y $U_2 \in L((\mathfrak{K}_2,[\cdot,\cdot]_2))$, dos operadores unitarios, $U_1\mathfrak{K}_1^{\pm} \subset \mathfrak{K}_1^{\pm}$, $U_2\mathfrak{K}_2^{\pm} \subset \mathfrak{K}_2^{\pm}$, $\mathcal{N}_1 \subset \mathfrak{K}_1$ y $\mathcal{N}_2 \subset \mathfrak{K}_2$ dos subespacios U_1 y U_2-invariantes respectivamente, $U_1N_1^{\pm} \subset N_1^{\pm}$ y $U_2N_2^{\pm} \subset N_2^{\pm}$ tales que*

$$T_1 = U_1 \mid N_1 \quad y \quad T_2 = U_2 \mid N_2$$

son operadores semi unitarios en N_1 y N_2 respectivamente.

Dado un acoplador unitario $T \in L((\mathfrak{K},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{K}}))$ de T_1 y T_2, con $\mathfrak{K}$ un espacio de Krein, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+[\dot{+}]\mathfrak{K}^-$ y $T(\mathfrak{K}^+) \subset \mathfrak{K}^+$ y $T(\mathfrak{K}^-) \subset \mathfrak{K}^-$, entonces existe un acoplador unitario $U \in L(H,)$ de U_1 y U_2 tal que

$$[h_1,h_2]_{\mathfrak{K}} = [h_1,h_2]_H$$

para todo $(h_1,h_2) \in \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$.

DEMOSTRACIÓN.

Como $U_1 \in L((\mathfrak{K}_1,[\cdot,\cdot]_1))$ y $U_2 \in L((\mathfrak{K}_2,[\cdot,\cdot]_2))$, son operadores unitarios, y $U_1\mathfrak{K}_1^{\pm} \subset \mathfrak{K}_1^{\pm}, U_2\mathfrak{K}_2^{\pm} \subset \mathfrak{K}_2^{\pm}$, entonces la Proposición 3.7 nos garantiza que U_1 y U_2 son unitarios en los respectivos espacios de Hilbert $\left(\mathfrak{K}_1,[\cdot,\cdot]_{J_{\mathfrak{K}_1}}\right)$ y $\left(\mathfrak{K}_2,[\cdot,\cdot]_{J_{\mathfrak{K}_2}}\right)$, similarmente se tiene que T es unitario en el espacios de Hilbert $\left(\mathfrak{K},[\cdot,\cdot]_{J_{\mathfrak{K}}}\right)$.

Además la proposición (3.9) garantiza que $T \in \left(\mathfrak{K},[\cdot,\cdot]_{J_{\mathfrak{K}}}\right)$, es un acoplador de T_1 y T_2.

Cotlar y Sadosky mostraron en [**5**] que existe un acoplador unitario $U \in L\left(H, [\cdot,\cdot]_{J_H}\right)$ tal que

$$[h_1, h_2]_{J_{\mathfrak{R}}} = [h_1, h_2]_{J_H}, \qquad \text{para todo } (h_1, h_2) \in \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2.$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} J_H J_{\mathfrak{R}}(x) &= J_H J_{\mathfrak{R}}\left(x^+ + x^-\right) \\ &= J_H\left(x^+ - x^-\right) \\ &= J_H\left(x^+\right) - J_H\left(x^-\right) \\ &= J_H\left(x^+ + 0\right) - J_H\left(0 + x^-\right) \\ &= x^+ - 0 - \left(0 - x^-\right) \\ &= x^+ + x^- \\ &= x. \end{aligned}$$

Además tenemos

$$\begin{aligned} [k_1, k_2]_{\mathfrak{R}} &= [J_{\mathfrak{R}} k_1, J_{\mathfrak{R}} k_2]_{\mathfrak{R}} \\ &= [J_{\mathfrak{R}} k_1, k_2]_{J_{\mathfrak{R}}} \\ &= [J_{\mathfrak{R}} k_1, k_2]_{J_H} \\ &= [J_H J_{\mathfrak{R}} k_1, k_2]_H \\ &= [k_1, k_2]_H \end{aligned}$$

También obtenemos

$$\|x\|_{J_{\mathfrak{R}}} = [x, x]_{J_{\mathfrak{R}}}^{\frac{1}{2}} = [x, x]_{J_{\mathcal{N}}}^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{J_{\mathcal{N}}}.$$

Luego

$$\|x\|_{J_{\mathfrak{R}}} = \|x\|_{J_{\mathcal{N}}}.$$

$\square$

Bibliografía

[1] N. Akhiezer, I. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space.* Transl. from the Russian (Two volumes bound as one). Repr. of the 1961 and 1963 transl. New York, NY: Dover Publications. xiv, 147, iv, 1993.

[2] J. Bognar. *Indefinite inner product spaces.* Springer-Verlag. IX, 1974. 9

[3] R. Bruzual, M. Domínguez, *Dilatación, Extensión y Representación de Formas Definidas Positivas.* Publicaciones del Postgrado en Matemática de la Facultad de Ciencias de la UCV, 30 Aniversario, 2006.

[4] M. Cotlar, R. Bruzual, P. Alegría, M. Domínguez, J. Giménez, S. Marcantognini. *Extensión y Representación de Formas Invariantes en la Teoría de Interpolación, Predicción y Dilatación.* Tercera Escuela Venezolana de Matemáticas, 1990.

[5] M. Cotlar, C. Sadosky. *Transference of metrics induced by unitary couplings, a Sarason theorem for the bidimensional torus, and a Sz.-Nagy-Foias theorem for two pairs of dilations.* J. Funct. Anal. 111, No.2, 473-488, 1993. 23, 33

[6] R. Douglas. *Banach algebra techniques in operator theory.* Academic press, 1972.

[7] H. Dym, H. P. Mc Kean. *Fourier series and integrals.* Academic Press, 1972.

[8] I.S. Iohvidov, M.G. Krein, H. Langer. *Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric.* Mathematical Research, Vol. 9. Berlin: Akademie-Verlag, 1982. 21

[9] V. Paulsen. *Completely bounded maps and dilations.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, 146, 1986.

[10] W. Rudin. *Fourier analysis on groups.* Interscience, 1962.

[11] Z. Sasvári. *Positive definite and definitizable functions.* Akademie Verlag, 1994.

[12] B. Sz.-Nagy, C. Foias. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space.* North Holland Publishing Co. 1970.

Índice alfabético