APOYO PARA PROFESORES

QUE UTILIZAN

METODOS DE GRAFICACION

PROLOGO

Plantear el uso activo de un libro, que incluya su presencia tanto en las clases de teoría como en las de práctica, es un objetivo ambicioso en una sociedad que tiene muy poca experiencia en ello. Exige un esfuerzo orientador considerable.

FUNCION DE APOYO AL DOCENTE.

"Apoyo para profesores que utilizan Métodos de Graficación" cumple una función evidente e inmediata de orientar al profesor aislado, u orientar y unificar el trabajo de un grupo de docentes, con la intención de facilitar el uso activo de MG. ¿Cuáles son los aspectos sobre los que se ha considerado necesario dar una orientación?

Orientación sobre cuales ejercicios no dejar de lado.

MG no es un texto clásico : está construido para que, fundamentalmente a través de ejercicios, los alumnos lleguen a desarrollar los conceptos inherentes al tema. No todos los ejercicios juegan el mismo papel. Por ello es conveniente saber con precisión en cuáles se debe lograr un buen dominio y dónde el apoyo del profesor es necesario y cuál es la forma que debería tener ese apoyo al alumno.

Orientación de cómo utilizar en clase a MG.

El libro MG se presta para ser incorporado como guía de actividades a ser desarrolladas tanto en clase de teoría como de práctica. Sin embargo, el uso eficiente de dicho texto en clase no es automático. Por ello es necesario dar algunas orientaciones al respecto.

Orientación en ciertas conexiones internas de MG.

Algunos conceptos presentes en MG son trabajados a lo largo de todo el curso. Uno de ellos es el de ecuación. Algunas de las situaciones problemáticas que surgen con estos conceptos no pueden ser resueltas de manera inmediata sin la introducción de una serie de conocimientos adicionales. En esos casos se ha preferido dejar el problema sin resolver hasta tener los elementos necesarios para un análisis adecuado. Esto hace que en MG, estén presentes algunas conexiones internas que pueden pasar desapercibidas a un lector apresurado. "Apoyo.." alerta sobre ellas a los docentes que vayan a utilizar MG.

Orientación en cuanto a tiempo para cubrir ciertas actividades.

El hecho de que MG esté construido esencialmente por sucesiones de ejercicios tiende a desorientar la mayoría de los docentes. Si incorporan el libro a sus clases y tratan de cubrir todos los ejercicios, se retrasan considerablemente en el dictado del curso, porque es imposible cubrir todos los ejercicios en clase. Por otro lado, escoger algunos ejercicios al azar puede tener como consecuencia perder las situaciones planteadas en MG que presentan los conceptos y algunas de las dificultades de aprendizaje del tema. Una tercera opción es la de dar un curso teórico clásico y utilizar MG como guía de práctica : esto puede asegurar la cobertura de los temas en un semestre pero se pierde buena parte del potencial de MG, como instrumento de aprendizaje. Por ello una orientación sobre qué actividades y el tiempo aproximado de dedicación a cada una de ellas resulta fundamental.

FUNCION DE APOYO A LA COORDINACION

Las necesidades de un coordinador de Matemáticas 1, aún teniendo que ver con lo señalado más arriba, tienen sus particularidades. Este libro puede ser también un instrumento para el coordinador. Aclaramos a continuación en qué le puede servir este libro.

Asegurar un mínimo de calidad docente en cada sección :

Cada docente tiene sus características personales que inciden en la calidad del dictado de su curso. En la medida en que el dictado es complejo, debido a la cantidad de materia a cubrir en el semestre, al número y heterogeneidad de los alumnos, etc, las diferencias individuales de los docentes pueden incidir desfavorablemente en la calidad del curso dictado. Una coordinación guiada por una visión democrática de la enseñanza, debe tener entre sus prioridades el minimizar la incidencia negativa de las diferencias personales de los docentes en la calidad de los cursos impartidos y con ello, favorecer la igualdad de acceso al conocimiento por parte de los alumnos. Para ello es esencial contar con una capacidad para dar directrices, a lo largo de todo el curso, que sean entendidas claramente por los docentes.

Pareciera que dar directrices va de sí. Sin embargo, quien lo ha intentado habrá chocado con ciertas limitaciones del medio ineludibles, comenzando por la de lograr reunir al equipo de trabajo. El otro problema es que aún reuniendo al equipo no es inmediato lograr hacer una reunión densa, donde las directrices sean completamente dadas y entendidas por todos. Modificar el tipo de interacciones habituales del equipo de trabajo requiere, como todo lo que se quiere transformar, una cantidad de trabajo no despreciable. Este libro ha sido pensado, entre otras cosas, como un instrumento para facilitar el dar directrices y modificar las relaciones de trabajo del equipo encargado de dictar Matemáticas 1.

Asegurar un ritmo colectivo que permita cubrir el programa.

Ya se han señalado las dificultades que tiene MG para ser utilizado adecuadamente, llevando un ritmo que permita cubrir los diferentes tópicos. El coordinador tiene además el problema de asegurar que todas las secciones bajo su responsabilidad vayan a un ritmo parecido. En general, pequeños incidentes inevitables hacen imposible una concertación perfecta, pero se ha visto que con nuestros docentes, la mayoría de los defases no sobrepasaron una clase (media semana). Ayudar a definir los ajustes a hacer en los dictados de los cursos, para cuadrar con las fechas de los parciales, es otra de las funciones de este libro.

Dar un espacio a los alumnos.

La manera más cómoda de dar una clase es la de hacer una exposición del contenido desde la pizarra. Esta manera, lamentablemente, no es la más efectiva para el aprendizaje del estudiante de los primeros semestres. De algún modo hay que asegurar que el estudiante tenga la oportunidad de hacer algunas actividades en clase, que vayan más allá de la toma de apuntes. Pero esto, con un cuerpo heterogéneo de docentes no es inmediato. Siempre hay una tensión de tiempo : dar menos de pupitre y más de pizarra. Porque el control del tiempo en pizarra es mucho más preciso. Además, existe la tendencia a sustituir un solo ejercicio de pupitre por varios similares de pizarra. "Apoyo.." facilita que en todas las clases se tome en cuenta la necesidad de que los alumnos realicen actividades, en clase, que favorecen grandemente su aprendizaje.

FUNCION DE TRANSMISION DE SABERES.

La aparición de “Apoyo..”, muestra que de algún modo MG es insuficiente para organizar la docencia del primer semestre con cierto nivel de calidad. Ya en las dos secciones anteriores se han señalado algunas de las funciones que se quiere que “Apoyo..” realice. Sin embargo, también se intenta que cumpla otras funciones menos evidentes.

Didáctica

Independientemente de las razones que justifican su aparición, por el mero hecho de estar presente en el medio, “Apoyo..” puede ser tomado como indicio de lo complejo que es la reproducción social de los saberes. Es el libro evidentemente hay saberes que tienen que ver con la didáctica, aunque no haya una referencia formal a ella ni mucho menos una exposición sistemática de ella. Un poco, como hay matemática en MG, en “Apoyo..” hay didáctica : está presente en observaciones, en comentarios, en la disposición de los tópicos, etc. No es un objeto de teoría de la didáctica, así como MG no es un objeto de teoría matemática.
El saber está compartimentalizado y es muy difícil salir de ello. En medio de la disposición actual de los saberes, en la cuál el acceso directo a los resultados de la didáctica útiles para la enseñanza, es difícil, libros como “Apoyo..” adquieren sentido : cumplen la función de hacer circular parte de esos saberes. El lector interesado sobre otros aspectos de didáctica relacionados con MG y más específicamente, sobre un modelo de cómo se trabaja en él los significados, puede consultar “Elementos para una teoría de la significación en didáctica de la matemática” . 2000, Tesis de Doctorado, Universidad de Bordeaux 1, Francia, la cuál será referida en el texto con [1].

Experiencia

Independientemente de la didáctica, nuestra sociedad no dispone de un marco en el cual la experiencia como profesor se transmita de unos a otros. Y esta experiencia es parte del saber social. En general la transmisión de la experiencia se hace o bien directamente en clase : el actual alumno, al convertirse en profesor tiende a imitar algunos de los profesores que tuvo. O bien, a través de pequeños comentarios y conversaciones casuales. Esto a todas luces es insuficiente y probablemente sea una de las razones del actual nivel de la enseñanza. “Apoyo..” al incorporar de forma escrita, parte de una larga experiencia acumulada, a nivel de un primer curso de cálculo, es una oportunidad de ampliar esa transmisión de experiencia y de reflexionar sobre ella.

CÓMO RESPONDE EL LIBRO A LAS EXIGENCIAS.

Las necesidades pedagógicas y didácticas, señaladas más arriba, justifican en buena medida la existencia de “Apoyo...”. Sin embargo, están lejos de condicionar totalmente su forma. Queremos aclarar brevemente algunos aspectos de la estructura del libro para facilitar su lectura.

El primer capítulo es de tipo pedagógico. Expone algunos conceptos y comentarios que se han considerado útiles. El resto del libro está organizado en Clases, que podrían pensarse como capítulos. Al pie de cada página está un código de la forma 2001-N1-N2. El significado de N1 es el capítulo al cual corresponde la clase. El significado de N2 es la posición de la clase en el dictado del capítulo. Ejemplo : 2001-9-3 es la tercera clase del capítulo 9. El número 2001 indica el año en que se terminó de escribir el libro.

Cada clase está estructurada en tres “Fases” : la inicial, la media y la final. El significado de estas fases está explicado en el primer capítulo. Y cada una de las fases contiene una sucesión de “Escenas”. Las escenas “son los átomos” del libro y por ello explicamos sucintamente en qué consisten.

La estructura de escena pone en juego : al libro MG, al profesor, al alumno y al contenido (o saber). Combina elementos pedagógicos (tiempo de la escena), disposición de elementos en la clase, etc. Pero al mismo tiempo incorpora elementos de didáctica mediante comentarios que tienen que ver directamente con los contenidos, con la experiencia que se tiene en la enseñanza de estos tópicos, con algunas aplicaciones de teoría didáctica, etc.

LA SITUACION DE REAL VARIABILIDAD

Hemos expuesto ciertos objetivos de “Apoyo..” y cómo está organizado para lograrlo. Es conveniente decir algunas palabras sobre la relación que se espera que mantenga un profesor con él.

Si convenimos en decir que dos clases son similares si cubren el mismo contenido, la afirmación de que “nunca dos clases similares son iguales” es universalmente aceptada. Pero tampoco es cierto que dos clases de un tema específico, dada por el mismo profesor, a dos grupos de alumnos diferentes, sean totalmente diferentes. Esto sugiere la descomposición de una clase en dos partes : una común a todas las clases similares y otra circunstancial, que

contiene las variaciones. La parte fija es fundamental y por ello conviene reflexionar sobre ella. Esto es lo que expone “Apoyo..”. Y esto define finalmente la relación que debería mantener un profesor con “Apoyo..” : no ignorarlo y utilizar las directrices globales. Pero no intentar seguirlo al pie de la letra porque esto es imposible, debido a las variaciones de clase a clase.
El libro debería ser utilizado, por el profesor que lo lee, para inventar en ciertas áreas. Para mejorar ciertos planteamientos. Para tomar conciencia de ciertos fenómenos de clase. Para situar su propia experiencia con respecto a otras experiencias. Para tomar conciencia de fenómenos que se repiten sistemáticamente en clase y con ello aumentar su capacidad de observación. Para interesarse en una realidad de la cuál participará probablemente durante años. Y para hacer más interesante esa realidad.

Es probable que una metáfora, basada en la noción de “Tour turístico” sea útil para la precisar la relación que se espera que el profesor mantenga con “Apoyo..”. El Tour está diseñado para hacer conocer un territorio a alguien que dispone de una cantidad limitada de recursos y de tiempo. Debido a esas limitaciones, lo que ofrece el Tour es asegurar, a quien lo toma, que va a aprovechar al máximo sus pocos recursos. Y para ello el Tour organiza muy cuidadosamente las actividades del turista. Lo lleva a los sitios más llamativos o importantes, asegura que se pierda el menor tiempo en transporte, en búsqueda de hotel, etc. Al dar un curso con MG se está en una situación similar a la de un Tour : no hay suficiente tiempo, en un semestre, para cubrir MG linealmente y al mismo nivel de profundidad en todas sus partes. Por ello es esencial una selección meditada de actividades y recorridos de MG.
MG puede ser pensado como un territorio que el alumno debe recorrer. Y el profesor debe de alguna manera organizar un Tour por ese territorio. Son pequeñas excursiones que el profesor dirige y que sitúan al alumno en el centro de una zona interesante. Desde ahí, el estudiante, sólo, puede iniciar pequeñas caminatas por los alrededores y conocer mejor el sitio.
Es el conocimiento de MG, como objeto, que “Apoyo..” tiene por objetivo. “Apoyo..” ofrece una selección de actividades, un recorrido probable y posible. Probable porque existen otros. Posible por realizable. Hecho por alguien que conoce MG y su funcionamiento en el medio venezolano. Los tiempos estipulados son sólo aproximados y en general por defecto. Deliberadamente, la suma de los minutos no coincide con el tiempo real de clase. En algunos casos se dan algunas recomendaciones que casi sorprenden. Se hacen porque se ha observado que ayudan a establecer la relación entre los alumnnos y el profesor. Detenerse a ese nivel de detalle inesperado, permite a los estudiantes establecer conexiones con conceptos matemáticos o entre ideas del contenido, que no son evidentes para algunos de ellos.
Quisieramos utilizar también la metáfora para hacer sentir la diferencia entre el trabajo en pizarra y el de pupitre : en un Tour el primero corresponde a una gira por los sitios sin bajarse del autobús, el segundo corresponde a las ocasiones en que el bus se detiene y el turista tiene la

oportunidad de bajarse, tomar fotos frente a los sitios, incluirse a él mismo en las fotos etc. La actividad de pupitre permite dejar una “marca” física sobre MG. Cuando el alumno retoma el libro en su casa, retoma también la marca. Así como el turista, que de vuelta a su casa, puede recordarse no sólo de los sitios visitados sino, al verse en las fotos, recuerda lo que *hizo* en esos sitios.

Esperamos que lo que se acaba de explicar ayude a fijar al profesor su distancia con respecto a “Apoyo..”. Lo ayude a definir cuál es la libertad que se puede tomar con respecto a sus directrices. Le haga percibir que tanto minutos, como escenas específicas, no son lo fundamental. Fijarse sólo en ellos sería vaciar de contenido lo que se pretende hacer : quedarse en la pura forma. Se espera que se utilice para que gradualmente el docente vaya descubriendo el trabajo mucho más fino y delicado que consiste en trabajar desde varios ángulos. Que lo ayude a enfrentar exitosamente los inevitables incidentes que obligan, frecuentemente, a recuadrar actividades y escenas.

Esperamos que las reflexiones que se acaban de hacer hayan dejado en claro que “Apoyo..” no fué pensado como un objeto de control sobre el docente, sino como un instrumento para su liberación. Tomen su distancia, pero tomenla de manera inteligente y generosa. Inteligente, entendiendo lo que es fundamental en este libro y haciendo con ello lo mejor en cada situación. Generosa, en el sentido de no utilizar esta recomendación para descartar las partes del libro que resultan incómodas y quedarse al nivel habitual.

Democracia y coordinación.

Ritmo y poca variabilidad son metas mínimas a alcanzar y esto no por razones de disciplina, de igualitarismo a ultranza, sino por razones de democracia: porque hay que tratar de dar iguales oportunidades a las diferentes personas. Asumir a plenitud la masificación de la educación no es trivial. Plantea una problemática, que los espíritus ingénuos creen resolver por una sencilla multiplicación de recursos. En esa visión ingénua se obvia la calidad: esta es muy difícil de alcanzar y es escurridiza. Y al final ella sigue siendo el privilegio de pocos: de aquellos que por suerte les tocó un buen profesor, o que por razones económicas accedieron a una escuela que aseguraba esa calidad, etc.

Entre el acceso seguro dado por el dinero y el acceso al azar, dado por la suerte, existe una vía intermedia. Es la de trabajar por ampliar el acceso a la calidad. Y este es el primer objetivo de este libro. Y casi todo él se puede relacionar a ese objetivo.

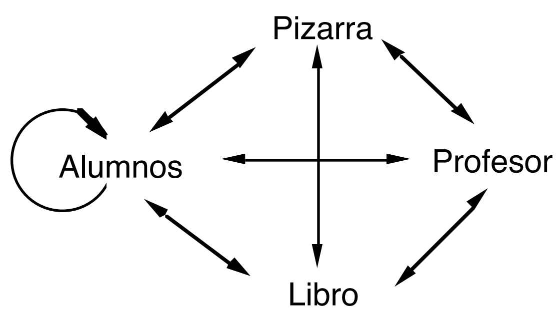
Caracas Enero 2002

PREAMBULOS

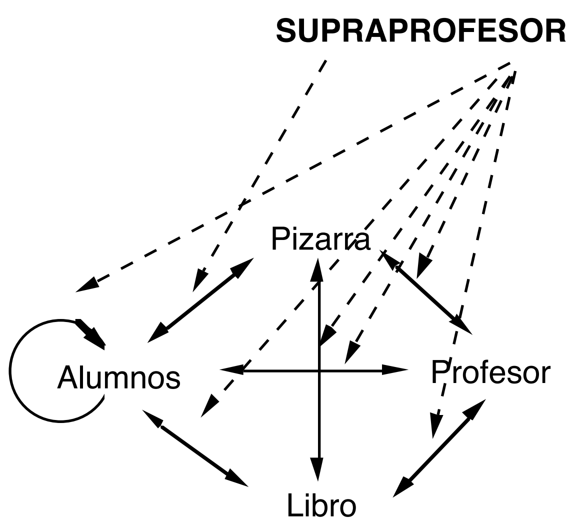
LOS ACTORES Y OBJETOS FISICAMENTE PRESENTES EN EL AULA.

En el aula hay, físicamente presentes, dos tipos de actores y dos objetos. Los actores son los alumnos y el profesor. Por actor se entiende "el que actúa" o "el que realiza una acción". Los objetos son la pizarra y el libro. Trabajar en una clase donde están presentes los cuatro entes que se señalan en la figura no es una tarea sencilla. De hecho, de manera inmediata se puede apreciar que hay 7 posibles interacciones, señaladas con flechas en la figura. Algunas son más útiles que otras. No siempre una de ellas es la mejor.

En el AULA



Para actuar en ese medio relativamente rico en objetos y actores se necesita la conciencia de un "supraprofesor", que piense en cada momento qué es lo más conveniente hacer entre un conjunto no despreciable de opciones.



En general un contenido debe ser tratado utilizando varias de las relaciones, de manera alterna y equilibrada.

EL MANEJO DEL TIEMPO DE CLASE

Uno de los retos más difíciles de enfrentar en el primer semestre es el manejo del tiempo. Hay mucha materia que dar y la formación que tienen los alumnos no ayuda a ir rápido. El reto está en la necesidad de ir rápido con alumnos con formación deficiente, no bajar el nivel y no hacer una masacre.

Una manera de enfrentar ese problema es el irresponsabilizarse. Esto es lo que se hace habitualmente al decirle al alumno que algo (que el alumno no entiende bien) es trivial. De esta manera el profesor se ahorra tiempo y responsabiliza al alumno de la situación, al mismo tiempo que él se lava las manos. Es una manera de apurar el paso para cumplir con los requerimientos formales del programa.

Afortunadamente existen maneras más constructivas y responsables de enfrentar el problema. En general apurar el tema minimizando los daños implica un conocimiento profundo del tema por el docente, una planificación cuidadosa de las actividades a realizar en cada clase, también el "trabajo cruzado" de algunos temas (adelantar y luego rectroceder, intercalar un tema con otro, retocar un tema en varias ocasiones en el curso etc)..etc.

Conocer profundamente el tema, no quiere decir solamente dominar las técnicas matemáticas que involucra, los conceptos, los diferentes enfoques, etc. Implica también tener claro, al menos algunas de las consecuencias de diferentes actividades (en la marcha del curso, en los aspectos cognitivos del alumno, etc). Implica también, saber dónde hay que insistir para poder avanzar evitando dejar en los alumnos abrumados de dudas y con la impresión de que entienderon muy poco. Saber los ejercicios que deben hacerse a un momento dado para no quedarse hablando sólo en clase, para no desconectarse de los alumnos,.etc. Este conocimiento se adquiere a través de los años, pero el tener conciencia de su existencia y el compartir las diferentes experiencias entre docentes del mismo tema acelera su adquisición.

ORGANIZACION DEL TIEMPO DE UNA CLASE

LAS FASES

En una sesión de clase de un poco más de una hora y media existen tres fases. Estas fases que son la inicial, la media y la final, están definidas tanto por factores sociológicos como por factores de índole sicológica. Dichos factores deben ser tomados en cuenta a la hora de planificar la clase. Son los que van a definir el tipo de actividad a realizar y su duración aproximada, en cada una de las fases.

DEFINICION DE FASES

	SOCIOLOGIA	SICOLOGIA
INICIAL	Hay alumnos que llegan tarde	Los alumnos vienen un poco perdidos
MEDIA	Casi toda la clase está presente	Los alumnos han sido llevados al tema de la materia.
FINAL	Hay algunos que comienzan a irse	Los alumnos están cansados

Es importante tomar en cuenta estas fases para optimizar el uso del tiempo de clase. En la fase inicial se debe tomar en cuenta que hay un porcentaje no despreciable de alumnos que todavía no han llegado al salón y además los que están todavía no están concentrados para atender. Por ello conviene en esta fase contestar dudas, hacer actividades de repaso, hacer actividades de pupitre que tienen que ver con la clase anterior, etc. La fase media es la principal fase de la clase : las condiciones están dadas para trabajar sobre contenidos nuevos. Debe ser cuidadosamente pensada y aprovechada. Al ir terminando la fase media, en general se ha cubierto bastante materia y hay altas probabilidades de que un grupo no despreciable de alumnos no esten debidamente incorporados. Por ello conviene al pasar al la fase final hacer algunas actividades de pupitre que redondeen lo hecho en la clase media, dar explicaciones de recapitulación de lo hecho en la fase media. Si el contenido de la próxima clase es muy diferente a la actual, dar una o dos ideas o actividades de la próxima. Porque la conexión con estas nuevas ideas no implica todo un desarrollo previo.

TIPOS DE ACTIVIDADES

Las clases y en particular las escenas involucran diversos tipos de actividades o, si seguimos el lenguaje teatral, actuaciones de los actores. Definimos a continuación las principales.

Dudas.

La actividad que llamamos "dudas", comienza por la pregunta, hecha por el profesor desde la pizarra : ¿Tienen dudas?. Los alumnos suelen participar haciendo las preguntas referentes a sus dudas específicas.

<u>Utilidad :</u>

La actividad dudas es útil desde varios puntos de vista. Indudablemete proporciona información de dónde andan las principales dudas. En algunos casos esta información puede inducir al profesor a contestar una duda específica, desde la pizarra; debido a que hay un sector amplio del curso que la tiene. Y puede utilizar lo observado para hacer respuestas para todos los alumnos, desde la pizarra. Las dudas que son planteadas por un solo alumno o por muy pocos, se suelen contestar individualmente.

La actividad dudas es particularmente apropiada al comienzo de la fase inicial de una clase. Permite aprovechar el tiempo mientras llegan suficientes alumnos. Hay que tener cuidado de no extender excesivamente esta actividad : cuando el flujo de preguntas es grande el profesor puede, sin darse cuenta y tratando de responder a todas las preguntas, extender excesivamente esta actividad en detrimento de las otras.

La atención individual es muy importante : en la actividad dudas, algunos alumnos son y se sienten tomados en cuenta. Además, la actividad ayuda a establecer la buena relación del profesor con los alumnos.

<u>Variedad de preguntas.</u>

La experiencia que se tienen muestra que las preguntas de la actividad dudas son bastante heterogéneas. La razón para ello es que los alumnos van a diferentes ritmos y por lo tanto las dudas provienen de diferentes temas, usualmente no sólo de la clase anterior. Es conveniente tener una actitud abierta y estar dispuesto a responder cualquier tipo de preguntas.

<u>Cómo reaccionan los alumnos a esta actividad :</u>

Existe, entre los alumnos que ingresan, poca costumbre sobre esta actividad. Inclusive, al comienzo del curso, algunos alumnos miran un poco divertidos al profesor preguntando por dudas. Pero siempre hay al menos un pequeño número que aprovecha la actividad. Gradualmente, a medida que avanza el semestre, el número de alumnos que se toman en serio la actividad aumenta y al final el flujo de preguntas se hace casi inmanejable.

Se ha observado que hay alumnos que prefieren preguntar al final de la clase. En general sus dudas son sistemáticas : vienen con un conjunto de dudas y las han ubicado en diferentes páginas. Es casi una consulta.

Pizarra

La actividad de pizarra es la más extendida en las clases de nuestro sistema educativo, tanto en bachillerato como en la universidad. En ella el profesor actúa desde la pizarra, "impartiendo su saber" o "el saber" a los alumnos. La estructuración de esta actividad depende en gran parte de cada profesor. Al otro actor en esta actividad de la clase le suele corresponder el "hacer apuntes" : tarea que consiste en copiar sobre el cuaderno lo que ha escrito el profesor sobre la pizarra o en su defecto transcribir al cuaderno algunas de las frases dichas por el profesor. A esta definición rígida de la actividad, habría que agregar algunas variantes como la de que un alumno solicite una aclaratoria al profesor, sobre algún guarismo escrito en la pizarra sobre el cual tiene dudas. O bien, que el profesor desde la pizarra, haga alguna pregunta, etc.
Esta actividad es frecuentemente utilizada en las escenas de las clases de los próximos capítulos.

<u>Utilidad</u>

La actividad pizarra es muy útil para el profesor. Desde ese ángulo le sirve para mantener el órden en la clase y un cierto ritmo de cobertura de los contenidos programáticos. Desde el punto de vista del alumno la situación es un poco diferente y depende en gran parte del nivel de los alumnos y su incorporación a la materia.

<u>Variedad de comportamientos</u>

Las actividades de un profesor en la pizarra son muy variadas. Cada profesor trata de ponerle un toque personal a su actuación en la pizarra. Sin embargo, los intecambios del profesor con el resto de la clase suelen estar bastante restringidos, a pesar de la buena voluntad de algunos profesores que preguntan constantemente desde la pizarra, para tratar de asegurarse que el grueso de los alumnos sigue las explicaciones. El alcance de estas se ve limitado por la toma de apuntes, que hace el grueso de los alumnos y que suele impedirles, en ese momento, entender las explicaciones dadas por el profesor.
Un estudio que explique el dominio casi absoluto, en nuestras aulas, de la actividad pizarra es parte de un futuro trabajo de investigación.

Tomar apuntes

Relacionada con la actividad "pizarra" está la actividad "tomar apuntes". Esta actividad es muy poco utilizada en las escenas de las clases que siguen. Las escenas que siguen y el libro MG han sido hechos para minimizar el uso de apuntes y con ello favorecer la comprensión de las explicaciones en la propia clase.

Utilidad

En los apuntes se resume la orientación del curso y el material que será tomado en cuenta a la hora del examen. Por ello los apuntes juegan un papel fundamental. Son, debido a la carencia de libros adaptados para sustituirlos, el sostén casi único de los alumnos cuando van a estudiar. Desde ese ángulo la actividad de toma de apuntes es sumamente útil. Pero esa no es la única faceta, ya se señaló más arriba que frenaba, en la propia clase, la comprensión de las explicaciones del profesor. El segundo inconveniente es la relación, que el apunte propicia, del alumno con los libros de texto.

Para la mayoría de nuestros alumnos el material básico de estudio no es el libro, sino los "apuntes". Dada esta situación ¿en qué posición queda el libro en nuestro sistema educativo y en particular en el bachillerato?. De algún modo nuestro sistema educativo debe cumplir el requerimiento básico de todo sistema educativo de "utilizar" libros. En nuestro sistema esta exigencia se resuelve en gran parte, con la fórmula casi mágica : "investigación para la casa". Un estudio de esta actividad no concierne directamente este libro. Un análisis detallado de este fenómeno rebasa el alcance del libro.

Variedad de comportamientos

La mayoría de los alumnos trata de tomar apuntes si la actividad es de pizarra. No todos los profesores facilitan la toma de apuntes. (Sus actuaciones en la pizarra no necesariamente son ordenadas para facilitar la toma de apuntes).

En pupitre

Esta actividad es realizada principalmente por los alumnos en pupitre. Es compleja, debido a que involucra fuertemente a todos los alumnos. La participación del profesor para hacer de esta actividad algo realmente provechoso, a nivel de aprendizaje, es vital. Por ello aunque aparentemente sea una actividad del alumno, es mas apropiado considerarla como una actividad donde tanto el alumno como el profesor participan.

Es utilizada ampliamente en las escenas que estructuran las clases que siguen en los próximos capítulos. Debido a ello, dedicamos a ella otra sección de este capítulo.

Utilidad

Provee al profesor información acerca del aprendizaje de los alumnos de manera más precisa que la actividad dudas y mucho más que la actividad pizarra. Es decir, permite al profesor una reorientación de su actuación en clase, para adaptarse a los alumnos y las dificultades de aprendizaje presentes en ellos. Es un elemento regulador.

La actividad pupitre es un factor de presión sobre el alumno : debe mantenerse atento. Esto se logra no por disciplina sino porque al requerírsele una actividad ligada a algo que se acaba de explicar, el alumno debe haber estado atento a la explicacón para poder hacerla. Esta actitud

activa, tratando de comprender, en la misma clase, lo que el profesor explica, se opone a uno de los efectos principales de la toma de apuntes : el no hacer un esfuerzo por entender las explicaciones del profesor, en el momento en que las hace.
La actividad pupitre debería estar siempre inmersa en una situación didáctica, con una finalidad que le da sentido. No se trata de mandar a hacer ejercicios por el mero disfrute de hacer trabajar o de castigar a los alumnos, como si fuera una plana. Por ello es muy importante motivar lo mejor posible la actividad a hacer en el pupitre.
La actividad puede ser utilizada para permitir al alumno asentar algunas ideas necesarias para la teoría que va a ser presentada más adelante. O bien, hacer un ejercicio de refrescamiento de un tema. O de asentamiento de un tema. etc.

Variedad de comportamientos

En la sección "El tiempo de actividad en pupitre" se analiza con cierto detalle los comportamientos de los alumnos.
En cuanto a los profesores, siempre hay una tensión de tiempo : dar menos de pupitre y más de pizarra. Porque el control del tiempo en pizarra es mucho más preciso. Sin embargo, en general, el tiempo "perdido", en una actividad de pupitre, es ampliamente recompensado a nivel de los logros de aprendizaje.
Existe la tendencia, de numerosos profesores, a sustituir un solo ejercicio de pupitre por varios similares de pizarra. En general es más rápido hacer los varios ejercicios en pizarra y además el profesor siente que "ha explicado". Si bien es necesario en la mayoría de los casos explicar la finalidad y a veces la manera de resolver un ejercicio tipo, el aprendizaje se hace cuando el alumno intenta por sí mismo, después de la explicación del profesor, hacer un ejercicio similar. En ese acto y para cada alumno, aflorarán diversos comportamientos, que manifiestan cuán adaptados están para realizar la tarea. Y en ese momento, la intervención del profesor, inteligente y en la mayoría de los casos individualizada, es realmente provechosa.

Pasar un alumno a la pizarra

Existe una costumbre muy extendida en bachillerato de pasar los alumnos a la pizarra a hacer ejercicios. A veces se pasan individualmente, en otras ocasiones se pasan varios simultáneamente y en otras, en grupos. Esta actividad no figura en las escenas que organizan la clase. Sin embargo, consideramos útil comentarla brevemente. Un estudio en detalle está fuera del alcance de este libro.

Utilidad

Convierte la actividad de resolución de ejercicio en una actividad "social". Donde funciona una estructura jerárquica . Las motivaciones para esta actividad es la de capturar la atención de los alumnos, por el mero hecho de que sea uno de ellos "el actor". Es una especie de espectáculo en el que el resto de los alumnos se vuelve espectador de manera real. Es una escena clásica del

bachillerato. En él libro está ausente y en general el profesor es el poseedor del saber y lo va soltando a medida que el alumno es paralizado o comete un error.
Evidentemente, también es un "descanso" de la actividad de pizarra. Y de los apuntes. Y esto justifica en buena parte la presencia de esa actividad en las clases de bachillerato.

Variedad de comportamientos

Entre los profesores hay diferentes maneras de utilizar esta actividad. Algunos pasan alumnos hasta que haya uno que sí hace bien el ejercicio que motivó la actividad. Otros prefieren dictarle al alumno lo que debe hacer. Otros intervienen sólo para corregir, etc.
En cuanto a los alumnos, hay toda una variedad de comportamientos. Algunos disfrutan de esa actividad, otros en cambio son temerosos y tímidos.

Desarrollo de una Escena

Esto es una actividad muy compleja como se verá más adelante. Involucra en general varios tipos de actividades y pone en juego varios recursos y actores. Las escenas las hemos organizado especificando qué es lo que va sobre la pizarra. El sitio del libro al que la escena se refiere. La actividad, tanto de profesores como de alumnos que hay que desarrollar. Y algunos comentarios de variadas índoles.

PROPIEDADES DE LAS ACTIVIDADES

Tiempo de duración

Toda actividad tiene un tiempo de duración. Conviene hacerse un estimado de dicho tiempo a la hora de planificar una clase.

Objetivo o función:

¿Para qué sirve una actividad? Una actividad siempre tiene al menos una finalidad o función, aunque estas puedan ser ignoradas por el docente. Sólo queremos nombrar algunas de ellas.

Resolver un problema de lenguaje, cuando, debido a los diferentes grados de dominio del lenguaje, la exposición es insuficiente para transmitir correctamente un saber.

Descanso o pausa en la transmisión.

Comunicación: saber en que estado están los alumnos.

Reorientar las acciones del profesor.

Preparación de una actividad posterior.

Desde el lado de lo cognitivo: construcción de significados, conocimiento de objetos, .etc.

Preparación

Una actividad involucra a los actores de manera muy precisa. Esto es imposible sin una preparación previa. Algunas requieren una preparación más larga que otras. Por ejemplo dudas no requiere casi preparación. La actividad de pupitre requiere, en general, bastante más.

Flexibilidad

La flexibilidad de una actividad es otra propiedad que pareciera importante a la hora de planificar una clase. El hecho de que una clase muy rara vez funciona como se había previsto obliga a hacer modificaciones sobre la marcha, esto implica operaciones del tipo : cortar abruptamente una actividad, eliminarla, reubicarla, etc. Por ejemplo la actividad dudas se puede cortar casi en cualquier momento, no así una explicación de pizarra o una actividad de pupitre. La reubicación de una actividad tiene que ver con el contenido transmitido.

Inclusión de una actividad

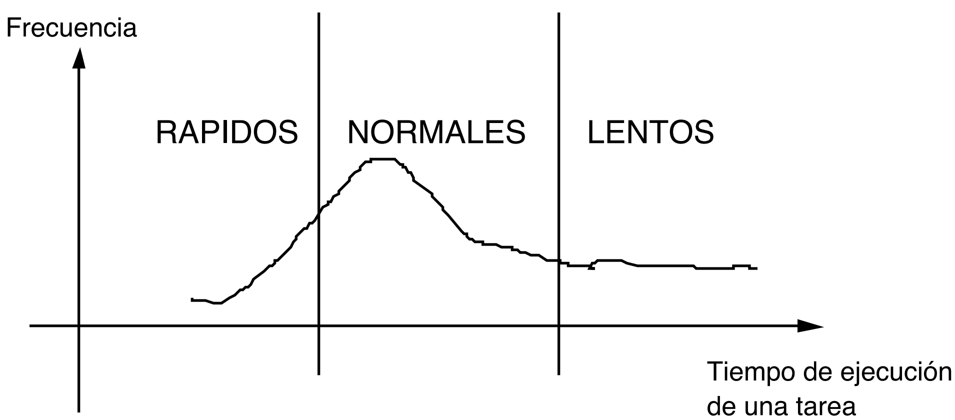
La inclusión de una actividad o escena específica en una clase es una decisión compleja.

Se puede incluir una actividad atendiendo a diversas razones. A veces se trata de incluirlas para estructurar la clase de acuerdo a una secuencia dada por la secuencia lógica matemática. Otras más bien porque se considera necesario para hacer una pausa. Otras para dar la posibilidad de hacer una adaptación del alumno a un tema nuevo. Además de ello hay que considerar el costo en tiempo.

EL TIEMPO DE ACTIVIDAD EN PUPITRE.

La actividad en pupitre debe ser muy bien dosificada. Se debe hacer un estimado de las acciones que implica hacer la actividad. Qué dibujos debe hacer cada estudiante. cuán larga es la respuesta, etc.
Un ejercicio que no ha sido explicado desconcierta a los alumnos y hace que se pierda mucho tiempo en preguntas individuales (y siempre son las mismas). Por ello, conviene en general hacer un modelo del ejercicio, antes de pedirles que hagan uno similar.

Cada alumno tiene "su tiempo" para hacer una tarea dada. Si se considera la totalidad de los tiempos individuales, para tener una visión de ellos se puede acudir al modelo que se da en la figura que sigue.



En la figura los alumnos han sido clasificados en tres categorías : los rápidos, los normales y los lentos.
Definición formal de A: los rápidos han terminado el ejercicio. Los lentos y normales todavía no.
Definición formal de B: los rápidos y normales han terminado el ejercicio. Los lentos todavía no.

COMO INTERVENIR

¿Se sabe a priori dónde intervenir? ¿Se sabe a priori cuanto vale A?¿Se sabe a priori cuanto vale B?
A los puntos A y B, se los conoce por definición pero en la práctica se detectan circulando entre los pupitres y ahí el profesor se hace una idea (por un muestreo informal) de cuántos alumnos han terminado la actividad planteada.

En caso de que el profesor quiera intervenir ¿Cómo hacerlo? La intervención del profesor depende de lo que realmente esté sucediendo en clase. Y depende del momento. Sólo ilustramos algunos casos.

En A

La mayoría de los alumnos no ha terminado.

Existen principalmente cuatro opciones :

1- Los rápidos les hacen los ejercicios a los otros.

2- Los rápidos comienzan a echar broma porque no tienen nada que hacer.

3- Los rápidos se dedican a hacer otros ejercicios.

4- Una combinación de las tres opciones anteriores.

La intervención del profesor puede influir y de hecho va a decidir cuál de ellas va a funcionar (de forma mayoritaria). Algunas consecuencias de las posibles acciones del profesor en este momento, son:

i) No hacer nada : se degrada el ambiente de clase porque la clase tiende a una combinación de 1 con 2.

ii) Cambiar de ejercicio en ese momento : la consecuencia es dejar a la mayoría sin oportunidad de hacer o entender el ejercicio.

iii) Decirle a los rápidos que sigan haciendo ejercicios del mismo tipo que siguen al ejercicio hecho : esto hace que los rápidos no pierdan el tiempo. Por otro lado los mantiene ocupados y da oportunidad que un grupo mayor de alumnos haga el ejercicio.

En B

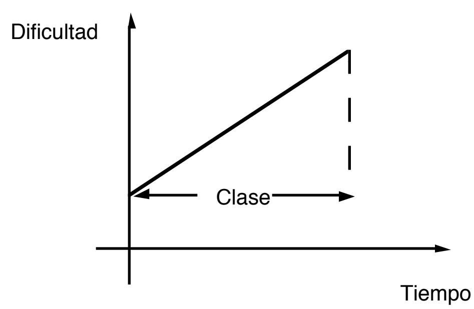
No intervenir es dejar que el tiempo dedicado al ejercicio sea demasiado grande y cause trastornos al desarrollo del curso.

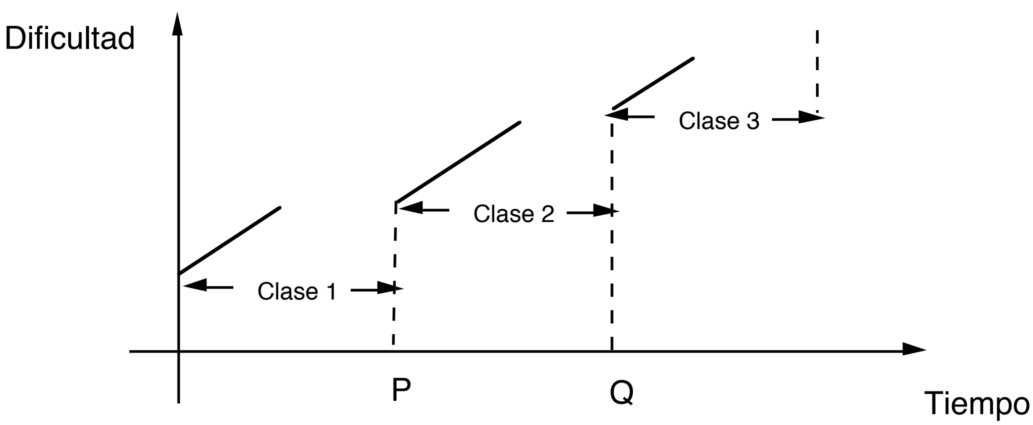
En caso de que el ejercicio no amerite comentario para todos, el profesor inicia otra actividad.

En caso de que el profesor considere útil hacer un comentario del ejercicio desde la pizarra, la intervención debería ser mixta: hablar del ejercicio para los que ya lo hicieron, haciendo algunos comentarios o referencias a lo hecho, pero por otro lado explicarlo para que los lentos tengan oportunidad de percibir aunque sea parcialmente el final del ejercicio. Esto es una manera de ayudar a mantener la cohesión del grupo.

LOS REACOMODOS EN EL TIEMPO

En los libros, un tema suele ser tratado de forma lineal. A medida que se avanza, en general, la dificultad aumenta. Por ello es necesario pararse para estudiar bien el comienzo del tema y así estar preparado para entender las nuevas partes. Si se pretende dar en la clase el tema siguiendo exactamente el libro, después de un cierto tiempo de clase, la mayoría de los alumnos no entenderá. Esto porque no han tenido oportunidad de pararse a repensar lo que ha sido explicado. Evidentemente la actividad de pupitre ayuda a resolver esta dificultad. Otro recurso es el que hemos denominado "reacomodos en el tiempo". La idea es partir un tema para darlo en varias clases y en cada clase no dar solamente el tema. Esto rompe la exposición lineal del libro pero permite que el alumno tenga tiempo para madurar un poco las diferentes partes del tema. En las clases que siguen se ha hecho uso de ese recurso en algunos capítulos, como son el capítulo 1 y el capítulo 6 (tema de rectas).





Note que la longitud de cada clase es más larga que el segmento inclinado de recta que le corresponde. El espacio adicional al segmento se supone que es para cubrir temas diferentes al referido por el segmento. Además los tres segmentos se refieren al mismo tema.

El particionar un tema plantea el problema de cómo reiniciarlo : cómo se debería intervenir en P? Hay que hacer una actividad para situarse en la nueva fase del tema. A veces es bueno, evocar algunos aspectos de la clase pasada. Otras hacer un ejercicio sencillo que utilice lo dado.

FILOSOFIA DE EXAMENES

Evaluación

"La evaluación" constituye un sector no despreciable de los estudios de educación. Esto da una idea de su importancia. Debido al hecho de que sobre ella descansa buena parte de "la solución" a los problemas y deficiencias de nuestro sistema educativo, esta importancia es para nosotros, aun mayor . Pesa, además, sobre nuestra visión de la evaluación, las múltiples funciones que ella cumple en nuestro sistema educativo.

Algunos principios que los exámenes deberían respetar son :

Relación con la materia cubierta

La relación del contenido del examen con la materia cubierta es fundamental para que el efecto de los exámenes sobre la actividad de reproducción del saber sea positivo.

Debe ser construido de manera a que la persona que ha estudiado pueda mostrar que sí lo ha hecho. Por ello los ejercicios que forman parte del examen deben ser sencillos y ejercicios similares deberían haber sido cubiertos en actividades de clase o práctica. El hecho de que nunca dos ejercicios son exactamente iguales, asegura que el alumno que los responde ha comprendido un mínimo de la materia. Y evita el "caletre".

Nota y examen

La asignación de notas a las preguntas debe ser pensada teniendo en mente que la nota representa la recompensa al esfuerzo del alumno **y del profesor**. Poner un examen con notas que privilegien los ejercicios "difíciles y rebuscados" es ir en contra de la premisa que se ha dado. La lógica que subyace a la afirmación que se acaba de hacer es la siguiente : un ejercicio es difícil si pocos alumnos lo pueden hacer. Esto significa que la nota de la mayoría de los alumnos va a ser obtenida en base a la máxima nota menos la nota de la pregunta difícil (porque no podrán contestar la pregunta difícil). Si la nota de ese ejercicio es alta la mayoría de los alumnos será corregido en base a una puntaje bastante menor al máximo. La inclusión de una pregunta difícil puede jugar un papel : el de identificar y distinguir alumnos muy capaces de alumnos promedio. Pero esto no necesariamente tiene que venir acompañado de una gran diferencia de notas. Basta con poner una nota pequeña a la pregunta difícil.

Cómo redactar un examen.

El examen debe ser redactado de manera que el alumno pueda entender rápidamente la pregunta que se le hace. Hay que evitar ambigüedades.

Debe ser redactado y diseñado también para facilitar su corrección por parte del profesor.

Tiempo de presentación de un examen.

Habitualmente un examen se hace con un tiempo de respuesta en mente. En general ese tiempo de respuesta no está bien estimado. Por ello se debe estar preparado para dar más tiempo. Esta decisión se toma en base al número de estudiantes que no han entregado en el tiempo previsto.

Es conveniente alargar el tiempo hasta ver que sólo queda, en el aula, de un diez a un quince por ciento de los que comenzaron a presentar el examen.

Posibles funciones adicionales de un examen

El examen, aparte de ser un instrumento para la evaluación, puede cumplir otras funciones importantes.

Por un lado puede ayudar a mantener el ánimo de un curso : el hecho de que un porcentaje no despreciable de personas sean exitosas en un examen incentiva al grupo. Por un lado los que salieron bien no quieren bajar su nota en el próximo examen. Por otro lado, los pocos que no salieron bien, se dan cuenta que salir bien no es algo imposible : la mayoría salió bien.

Otro aspecto, importante en nuestro medio, es que los alumnos tienden a no copiarse cuando ven que estudiando pueden ser exitosos. La copia es el recurso de la desesperanza. Por ello es muy importante hacer examenes a la altura de los contenidos y de los aprendizajes logrados. Al lograr esto el alumno pasa de una actitud de fraude y copiadera, a una actitud de reto.

El examen puede ser utilizado para mantener el ritmo de estudio del alumno. La mayoría de nuestros estudiantes han sido entrenados a estudiar para los examenes. Por ello el hacer numerosos examenes de práctica, unos diez por semestre, ayuda a que estudien de manera casi contínua. Esto es un entrenamiento necesario en una carrera científica.

El examen es también una ocasión de aprender. Y esto no hay que perderlo de vista al momento de diseñar un examen.

LA DIFERENCIA ENTRE HABLAR DEL COMPORTAMIENTO DE LOS ALUMNOS Y USAR ESE CONOCIMIENTO PARA DAR LA CLASE.

Modelo de comportamiento

En nuestro sistema educativo, el alumno refleja el saber adquirido en su capacidad para realizar ciertas acciones que responden adecuadamente a una situación. Por ello hay que enseñar a los alumnos, a efectuar ciertas acciones. Dichas acciones parecen triviales pero no son fácilmente aprendidas. Probablemente porque toda acción humana es una totalidad que incluye dos "subacciones" : la acción propiamente dicha y la reflexión sobre la acción. Sin la reflexión no hay aprendizaje.

Principio 1. Para cada situación existen las acciones adecuadas y las inadecuadas.

Principio 2. Bajo ciertas condiciones y con cierto tipo de alumnos, cada acción, adecuada o inadecuada, tienen una frecuencia de aparición, que tiende a hacer pensar que tiene una probabilidad de aparición. No se sabe nada de si estos resultados probables están ligados por el factor individual. Ni siquiera se tiene un estimado de las probabilidades en caso de que existan.

Esto a grosso modo es lo llamamos el comportamiento de los alumnos.

Principio 3. Un docente a medida que adquiere experiencia, comienza a tener una idea de las frecuencias de aparición de las diferentes acciones e inclusive, a veces, se hace modelos que las explican.

Esto es lo que llamamos "conocimiento del comportamiento de los alumnos" por parte del profesor.

SItuación

Nos interesa considerar la siguiente pregunta : ¿cómo debería utilizar el profesor el conocimiento que tiene del comportamiento de los alumnos para enseñarles a efectuar las acciones adecuadas?. Podemos clasificar las posibles acciones del profesor, motivadas por ese conocimiento, en dos tipos :

1- Alertar y describir a los estudiantes sobre las posibles acciones inadecuadas.

Esta manera de actuar es extremadamente frecuente, pero es muy poco provechosa. Es análoga a dar una dirección a una persona indicándole por donde no tiene que ir. La mayoría de los alumnos no domina todavía la acción y por lo tanto difícilmente puede servirle de definición de la acción esas alertas. De hecho el profesor describe las acciones que no se deben hacer porque la descripción de lo que debería hacerse no funciona. ¿Porqué la descripción de lo que no debe hacerse funcionaría de manera más precisa que la descripción de lo que se debe hacer?

2- Preparar situaciones para tratar las acciones inadecuadas.

Sabiendo que las acciones inadecuadas van a aflorar y conociendo las condiciones en que aparecen, conviene plantearle al estudiante situaciones (en general hechas mediante pequeños ejercicios) donde estas puedan aparecer. Y al mismo tiempo preparar dispositivos que permitan la corrección y el análisis de esas acciones por parte del estudiante. MG está construido tomando en cuenta estos hechos. Estas ideas generales sobre el aprendizaje proviene de la Teoría de Situaciones, enunciada por G. Brousseau.

Al plantear las situaciones y poner dispositivos, el libro o el profesor no hacen ninguna referencia al estudiante, sobre sus posibles errores. De manera que el estudiante no debe hacerse una idea de ellos a partir de las palabras del profesor o del libro. Los dispositivos tienen por objetivo favorecer la reflexión del estudiante, en caso de que su acción haya sido inadecuada. Tratan de hacer aparecer una contradicción visible al estudiante. En algunos casos es la intervención del profesor, a través de una pregunta inteligente, la que puede suplir el papel del dispositivo, de hacer aparecer o llamar la atención sobre la contradicción.

LA FORMACION DEL GRUPO

Una sección no es sólo un agregado disconexo de indivíduos. Existen una serie de relaciones que se establecen entre los alumnos mismos. En un sentido metafórico una sección es más bien un grupo que un conjunto.
El carácter de grupo es afectado por el tipo de ambiente y de actividades que se hacen a lo largo del semestre en una materia. Específicamente : las relaciones entre los indivíduos de una sección evolucionan a lo largo del semestre. El profesor debe ser muy atento a ese tipo de fenómenos porque en un buen grupo se facilita la transmisión de los saberes.

> En general la formación de un buen grupo asegura una presencia estable de los alumnos en clase.
> La formación del grupo ayuda en las interacciones entre el profesor y los alumnos : por ejemplo facilita reconocer cuándo los alumnos comienzan a distanciarse, en cuanto a la comprensión, del contenido de la materia que se está dando. Esto puede incidir en reajustes en el cronograma, que el profesor puede hacer. Estos, no tienen porqué ser muy grandes, pero su efecto es considerable.
> Existe una "percepción de grupo" que tiene el grupo. Y en este sentido se puede hablar de la visión que tiene el grupo sobre su preparador, su profesor, la dificultad de la materia, etc. Cuando en esa percepción, el profesor aparece como alguien que puede responder preguntas con respuestas que se entienden, el interés por la materia a ser transmitida aumenta considerablemente y las interacciones del grupo con el profesor aumentan.
> Los grupos que se forman en un semestre y en una materia, a veces van desarrollándose en semestres posteriores.

Debido a que un buen grupo tiene importancia en la transmisión de saberes, el profesor debe estar alerta para favorecer su consolidación y fortificación. La mayor energía está en los alumnos más débiles: si el profesor logra interesarlos va a tener un magnífico grupo. Pero interesarlos no es fácil : hay que hacer actividades que permitan a dichos alumnos darse cuenta de que son capaces de hacerlas y con ello, alcanzar gradualmente el estatus de pertenencia al grupo.

CLASE 1

VISION GLOBAL

La primera clase, en la mayoría de los cursos, suele ser una clase perdida. Sin embargo, en esa clase hay varias actividades que se deberían hacer.

1- La primera de ellas es presentarse.
2- Nombrar el texto (o los textos) que se va (n) a utilizar o que pueden ser útiles para el curso. En nuestro caso se trata de Métodos de Graficación. Es conveniente informar al estudiante donde obtenerlo.
3- Dar la estructura de evaluación.
4- Fecha de los parciales.
5- Se puede dar el contenido (tentativo) de materia de cada parcial.
Primer parcial : los cinco primeros capítulos.
Segundo parcial : del capítulo 6 al 8 inclusive.
Final : los capítulos 9 y 10.

6- Finalmente se puede comenzar a cubrir el Capítulo cero de MG (en nuestro caso), transmitiendo (desde la primera clase) parte de la atmósfera que va a tener el curso. Es conveniente que el alumno tome conciencia desde la primera clase que parte de su participación en clase incluye actividades de resolución de ejercicios en su pupitre. La mayoría de los estudiantes no tendrá el libro, porque no han podido adquirirlo. Por ello deberá escribir en la pizarra un poco más que si tuviesen el libro. Los ejercicios del plano cartesiano se pueden hacer en pupitre porque exigen muy poca escritura por parte del esrtudiante.

FASE INICIAL

ESCENA 1

<u>Comentario</u>

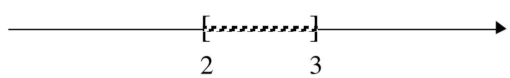
En esta primera clase, la fase inicial es atípica. Se debería hacer la presentación del curso descrita en " visión global".

FASE MEDIA

ESCENA 2

<u>Pizarra</u>

Complete siguiendo el modelo de la segunda fila.

Notación de intervalos	*Representación en la recta*	*Representación algebraica y/o conjuntista*
$[2,3]$		$2 \leq x \leq 3$
$(2,3)$		
$(-\infty,2)$		
		$x \geq 2$
$[1,1]$		

<u>Libro : 0-1</u>

<u>Actividad (10 minutos, pupitre)</u>

Hacer notar que son tres columnas, que todas hablan de lo mismo pero de forma diferente.

Notación de intervalos	*Representación en la recta*	*Representación algebraica y/o conjuntista*

Estudio del ejemplo

$[2,3]$		$2 \leq x \leq 3$

Comenzar por

$[2,3]$		

y hacerlo (en la pizarra).

Hablar de la diferencia entre] y). En un caso se llama cerrado y en el otro abierto.
Se debe aclarar (de repente haciendo el ejercicio que sigue) qué relación tiene] con ≤ . Cuándo se pone el igual y cuándo no. El hecho de que el conjunto incluya o no el extremo.

$(2,3)$		

Hablar de la libertad que hay: se puede tener [con) o (con] o [con] o (con).
Por ejemplo pueden fabricar: $[2,3)$ o $(2,3]$. ¿En qué cambiaría la representación?

$(2,3]$		

$[2,3)$		

Plantear algún caso saliendo de otros cuadros.

		$-1 < x \leq 4$

Comentar (preguntando) algunos casos raros

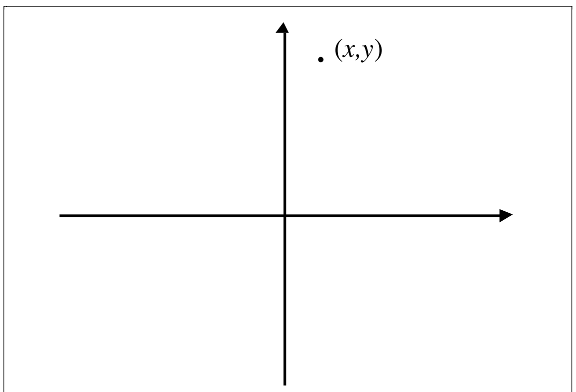
$(-\infty, 2)$	$\longrightarrow$	
	$\longrightarrow$	$x \geq 2$
$[1,1]$	$\longrightarrow$	

<u>Comentario</u>

No conviene extenderse en dar definiciones generales sobre las operaciones entre conjuntos.

ESCENA 3

<u>Pizarra</u>



$(x,-y), (-x,y), (-x,-y), (y,x)$

<u>Libro : 0-6</u>

<u>Actividad (10 minutos, pupitre)</u>

Sitúe, como puntos, los pares ordenados y escriba al lado de cada punto el par correspondiente. **Debe hacerlo respetando las escalas**.

<u>Comentario</u>

La representación de un par ordenado por un punto en el plano cartesiano es conocida por casi todos los estudiantes. Por lo tanto el objetivo didáctico de hablar de esa representación no es realmente ella. Los ejercicios de esta sección tienen por finalidad poner en evidencia ciertas propiedades de las relaciones que hay entre los objetos que designan y los designados.

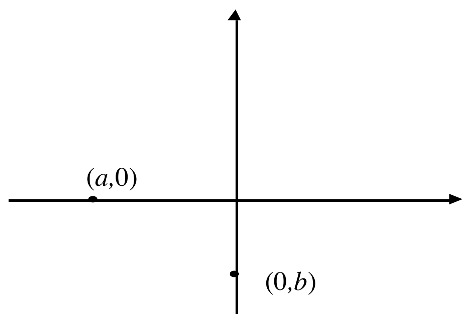
Ahí el choque es cuando el estudiante debe representar al par (y,x). La idea que tienen los que chocan, es que la abcisa, como corresponde al eje de las x , no puede ser designada con la letra y.

En esta actividad el profesor debe dejar a los estudiantes que trabajen en sus pupitres, circular entre ellos.
Ver hasta dónde llegaron. Algunos no toman en cuenta la condición de "respetar la escala". Y por lo tanto hay que decirles que rehagan los puntos.
En algún momento (despues de unos 5 minutos) cuando se ve que la mayoría ha hecho el ejercicio y a algunos les falta situar el (y,x) se puede iniciar una discusión en la pizarra. Desde ahí se puede tomar ejemplos numéricos del tipo:

si se identifica (x,y) con $(1,3)$ ¿con quién se debe identificar (y,x)?

ESCENA 4

<u>Pizarra</u>



<u>Libro : 0-6</u>

<u>Actividad (5 minutos, pupitre)</u>

La indicada en el libro.

<u>Comentario</u>

En el ejercicio se ha designado a propósito un punto sobre la parte negativa del eje x con $(a,0)$. Esto obliga a situar al punto designado por $(-a,0)$ en la parte positiva del eje x. Esto es un choque para más de un estudiante.
Muchos de los estudiantes creen que el número designado por la expresión $-x$ debe ser negativo porque hay un signo – delante del x. Volverles a decir que $-x$ puede ser positivo, no suele ser efectivo. Es más provechoso ponerlos en una situación donde van a chocar con esa creencia falsa.
De todas maneras, se ha observado que este tipo de actividades, aunque positivas, son insuficientes para eliminar esa creencia a todos los estudiantes que la tienen.

FASE FINAL

<u>Comentario</u>

Dar las recomendaciones a los estudiantes para la clase de práctica. En particular que sigan trabajando en casa completando las actividades que corresponden a las partes que se han cubierto en clase.

CLASE 2

VISION GLOBAL

Si las cosas han ido como previstas, numerosos alumnos tendrán dudas sobre la parte de intervalos del Capítulo Cero. Estas dudas deben ser tratadas parcialmente (son demasiado numerosas).

El grueso de la clase debe concentrarse en la presentación del mayor número de “propiedades de curvas”. Esta es la parte del MG comprendida entre las páginas 1-1 y 1-9. En general se suele llegar hasta máximos. Conviene dejar la parte de cotas para la segunda clase del capítulo.

El final de la clase debería de estar centrado en la realización de los ejercicios de la página 1-11.

FASE INICIAL

ESCENA 1

<u>Pizarra</u>

De acuerdo a las dudas de los alumnos

<u>Libro : Cap 0</u>

<u>Actividad (15 minutos, pizarra o consulta individual)</u>

Responder las dudas que tienen los alumnos sobre el Capítulo cero. De acuerdo a las circunstancias, puede convenir dar alguna explicación sobre un punto específico en la pizarra o explicaciones individuales.

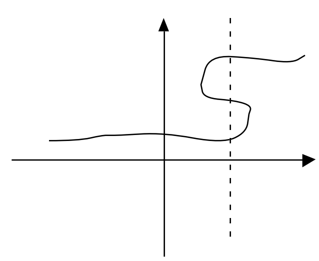
<u>Comentario</u>

Esta actividad es importante para que los alumnos sientan el soporte y la disposición del profesor.

FASE MEDIA

ESCENA 2

<u>Pizarra</u>



<u>Libro : 1-1</u>

<u>Actividad (3 minutos, pizarra)</u>

<u>Comentario</u>

La convención que se presenta en esta escena, tiene por finalidad restringir el conjunto de curvas que se van a estudiar, utilizando para ello un mínimo de recursos formales. Es para hacerle notar al estudiante el tipo de curvas que van a ser objeto de estudio en el curso y en particular el principal objeto de estudio del Capítulo 1.

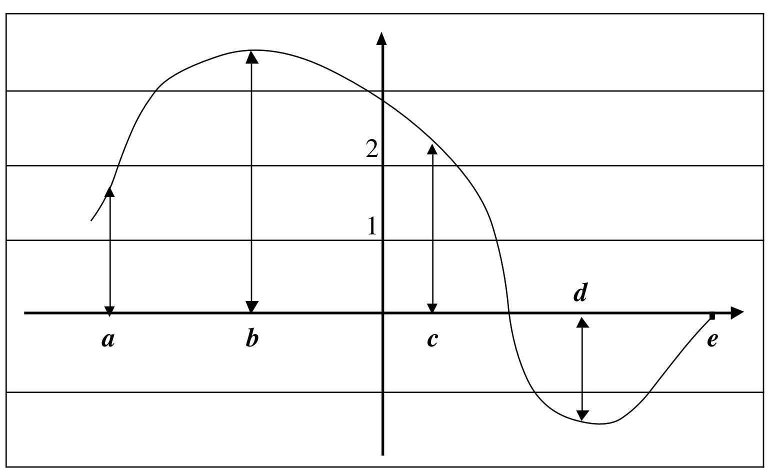
Estas curvas son utilizadas para hacer una representación gráfica en el plano cartesiano de lo que se denomina “el gráfico de una función real” (el cuál evidentemente no es una figura sino, desde el punto de vista de la matemática, un *conjunto* de pares ordenados). La intención del primer capítulo es que el alumno se relacione y comience a conocer estos objetos que van a ser utilizados a lo largo de todo el semestre. El libro ha sido organizado para que dicho conocimiento se realice sin necesidad de introducir el formalismo habitual en el cual el objeto curva aparece. Es decir, sin tener que hablar de función y luego de gráfico de función.

Existe una serie de manipulaciones que se pueden hacer con estos objetos, sin necesidad de acudir al formalismo que, de algún modo, justifica su uso en los cursos de cálculo elemental. El dominio de estas manipulaciones es lo que hace que posteriormente dichos objetos puedan ser utilizados, tanto por alumnos como por profesores, como “modelos físicos” de gráficas de funciones reales. Pero estas manipulaciones son de carácter más general.

El punto de vista bajo el cual se quiere manipular estos objetos es análogo al que adopta un médico al ver un electro cardiograma, o un sismólogo ante un registro sísmico : ambos profesionales tienen una capacidad de “leer” la curva que les es presentada y con ello obtener una información relevante para los fines de su profesión. En nuestro caso se quiere desarrollar una capacidad similar en los estudiantes, pero para percibir propiedades de índole matemática. En particular se lo quiere entrenar a reconocer puntos extremales, dominio y rango, partes crecientes o decrecientes, partes positivas o negativas, ..etc.

ESCENA 3

Pizarra



Libro : 1-1

Actividad (3 minutos, pizarra)

Completar algunas (no todas porque no hay tiempo para ello) de las preguntas planteadas en la página 1-1.

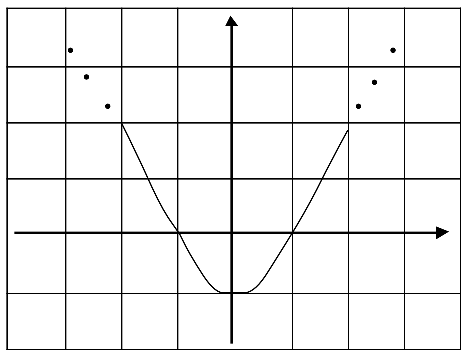
Comentario

Hacer ver lo que es la altura de una curva en un valor dado de la x. Hacer notar que no se puede hablar de "la" altura de una curva, pero si se puede hablar de "la" altura de un punto.

ESCENA 4

Pizarra

EJEMPLO 1.



$alt(-2) =$	$alt(\quad) = -2$
$alt(0) =$	$alt(\quad) = -1$

Libro : 1-2

Actividad (2 minutos, pizarra)

Mostrar cómo se completan las expresiones que aparecen debajo de la curva del Ejemplo 1 de la página 1-2.

Comentario

Debe explicitar que contestar $Alt(5) =$ significa escribir después del signo igual la altura de la curva en la vertical que pasa por cinco. Gráficamente esto significa la altura del punto de intersección de la curva con la vertical (recta paralela al eje y que pasa por el punto $(5,0)$).

Y que responder $Alt(\quad) = 1$ significa : poner en el espacio que queda entre los paréntesis el (o los) valor de la abcisa de los puntos de la curva que tienen altura 1 (en caso de que exista). Esto equivale gráficamente a ver cuales son las abcisas de los "puntos de corte" de la recta paralela al eje x a la altura 1, con la curva del ejemplo.

ESCENA 5

Pizarra

"Trabajar el Ejemplo 2 de la página 1-2".

Libro : 1-2

Actividad (3 minutos, pupitre)

Realizar el ejercicio asociado al Ejemplo 2.

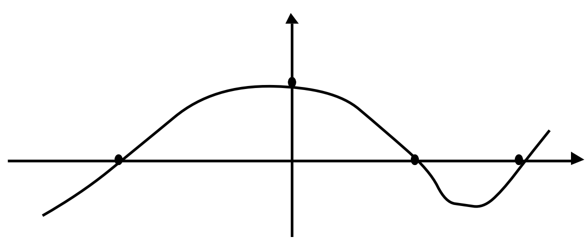
Comentario

No hace falta hacer el dibujo de la Figura en la pizarra. Sólo dar la indicación por escrito. Esta actividad es sólo para dar la oportunidad a los estudiantes de verificar si han captado claramente las nociones de la actividad anterior. El profesor debería circular entre los pupitres viendo la calidad de las respuestas, interviniendo oportunamente y estando disponible para contestar dudas.

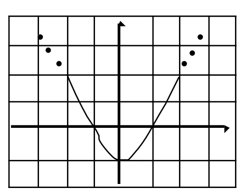
El profesor puede dar la indicación a aquellos que hayan hecho el ejercicio en menor tiempo que el estimado para la actividad, que pueden trabajar los ejemplos que siguen.

ESCENA 6

Pizarra



Ejemplos	Puntos de corte con el eje x.	Puntos de corte con el eje y.
1		



Libro : 1-3

Actividad (2 minutos, pizarra)

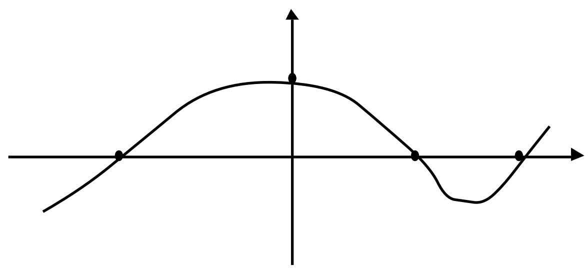
Leer lo que pone el libro sobre la propiedad. Y estudiar la propiedad para la figura del Ejemplo 1 de la página 1-2.

Comentario

Especificar un aspecto o propiedad de una curva, requiere por parte del indivíduo que lo hace, una serie de pequeñas acciones precisas. El objetivo de las primeras diez páginas del Capítulo 1 es el de facilitar el aprendizaje de esas acciones y asegurar una calidad mínima de ese aprendizaje.

La presentación y estudio de las propiedades de las curvas que se hace en el libro sigue un esquema fijo para todas las propiedades, teniendo siempre en cuenta la enseñanza de esas acciones. Por ello a continuación se describe el esquema con cierto detalle :

El primer paso es la presentación de la propiedad sobre figura con una curva y unos comentarios que aparecen en la página. Esto sirve de orientación tanto para los posibles comentarios del profesor como para el alumno. En el caso de la propiedad de los puntos de corte, la figura es :



Observe que en la figura además de la curva están unos "puntos gruesos", con el objeto de representar la noción que se quiere introducir. El comentario es "Los puntos "gruesos" que aparecen sobre la curva y los ejes de la figura reciben el nombre de puntos de corte de la curva con los ejes."

El segundo paso es estudiar la propiedad para una curva de los ejemplos de la página 1-2. Y para ello se incluye, en cada una de las propiedades, una tabla, donde cada fila representa uno de los ejemplos de dicha página. Este paso lo hace el profesor desde la pizarra, acompañado de los alumnos y sus posibles preguntas. En el caso de los puntos de corte esto nos lleva a :

Ejemplos	Puntos de corte con el eje x.	Puntos de corte con el eje y.
1	$-1\ y\ 1$	-1

Algunos profesores prefieren poner

Ejemplos	Puntos de corte con el eje x.	Puntos de corte con el eje y.
1	$(-1,0)\ y\ (1,0)$	$(0,-1)$

El tercer paso consiste en pedirle a los alumnos que completen otra fila de la tabla de los ejemplos (no tiene necesariamente que ser la segunda, aunque conviene que sea la misma para todos). **Esta es una actividad de pupitre y es necesaria para que la mayoría de los alumnos constaten si han entendido claramente de qué se trata.** Si hubiese tiempo sería conveniente hacer más de un ejemplo. En todo caso, alguno de los ejemplos también puede ser tratado por los alumnos en la práctica.

Este tercer paso es fundamental, porque se ha comprobado que tanto las indicaciones escritas en el texto, como las “explicaciones” del profesor son insuficientes para asegurar que todos los alumnos han “entendido” de qué se trata. El único medio que conocemos, es el de darle al alumno la oportunidad de hacer esas acciones bajo la supervisión del profesor. Y es en la realización de esas acciones que van a surgir dudas y que el profesor, al ver lo que ha hecho el alumno, va a poder informarle si ha captado o no la idea, si está realizando correctamente o no, las acciones que debe aprender. El enunciado formal de las propiedades es estéril a estas alturas y aparte de llevar a una pérdida de tiempo, produce una inseguridad innecesaria en el alumno.

ESCENA 7

Pizarra

Ejemplos	Puntos de corte con el eje x.	Puntos de corte con el eje y.
2		
3		

Libro : 1-3

Actividad (3 minutos, pupitre)

Llenar las filas de los ejemplos 2 y 3 de la tabla correspondiente a los puntos de corte.

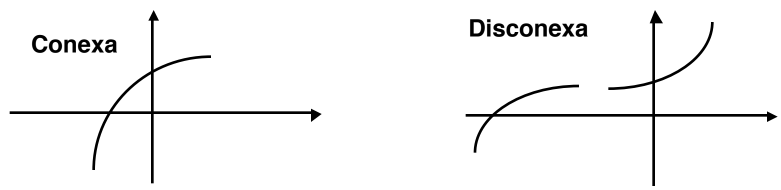
Comentario

En el caso de los puntos de corte conviene que hagan el Ejemplo 2 y el 3 (porque el Ejemplo 3 es un ejemplo de curva que no tiene puntos de corte con los ejes).

Esta actividad es la que corresponde al "tercer paso" que se explicó en los comentarios de la escena anterior, para el caso específico de la propiedad de los puntos de corte.

ESCENA 8

Pizarra



<u>Libro : 1-3</u>

<u>Actividad (2 minutos, pupitre)</u>

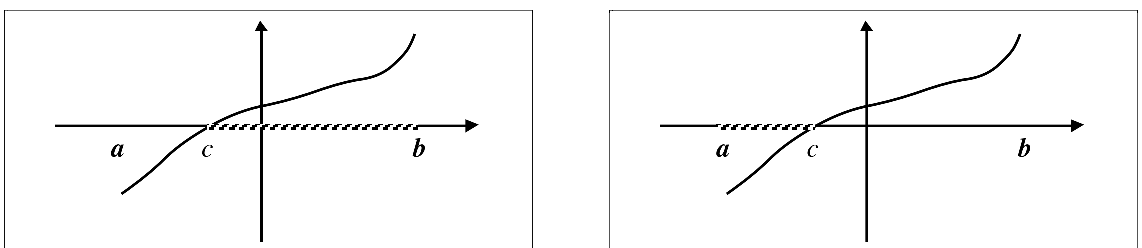
Completar parte de la tabla correspondiente a la propiedad.

<u>Comentario</u>

Existe una gran diferencia entre discontinuidad y disconexidad. La propiedad que se quiere ilustrar es la de conexidad o disconexidad de la curva.

ESCENA 9

<u>Pizarra</u>



$(c,b]$	$[a,c)$

<u>Libro : 1-4</u>

<u>Actividad (2 minutos, pizarra)</u>

Presentación de la propiedad. Esta presentación puede hacerse **desarrollando simultáneamente la capacidad de lectura y de observación de los alumnos**. Algunas preguntas que pueden ayudar en esto, son :

¿"Qué" diferencia hay entre los dos gráficos?

¿Existe alguna relación entre los intervalos que aparecen debajo de cada dibujo y las partes rayadas?

¿Porqué $(c,b]$ y $[a,c)$ no son intervalos cerrados?

Para la parte del eje x que corresponde a $(c,b]$, ¿la curva está por debajo o por encima del eje x?

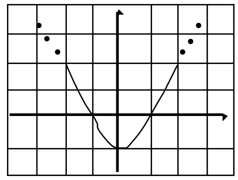
Comentario

Señalar que las partes donde la altura es cero no forman parte ni de las negativas ni de las positivas.

(Esto viene como respuesta a una de las preguntas).

ESCENA 10

Pizarra



Ejemplos	Parte positiva.	Parte negativa.
1		

Libro : 1-4

Actividad (3 minutos, pizarra)

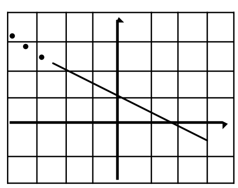
Segundo paso de la propiedad de parte positiva y parte negativa.

Comentario

El Ejemplo 1 es interesante porque la parte positiva es disconexa.

ESCENA 11

Pizarra



Ejemplos	Parte positiva.	Parte negativa.
2		

Libro : 1-4

Actividad (2 minutos, pupitre)

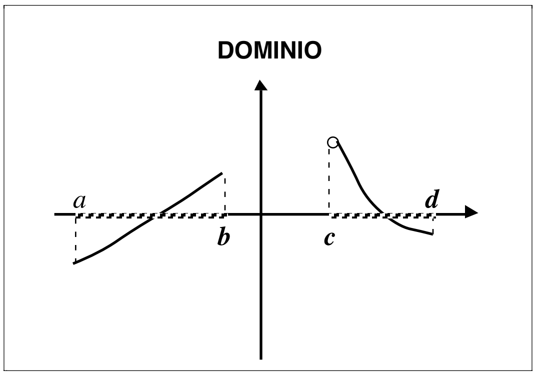
Hacer el ejercicio que corresponde al segundo ejemplo.

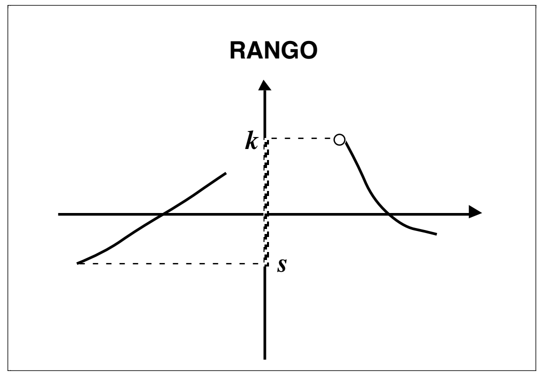
Comentario

Esto es el tercer paso de estudio de la propiedad : el alumno hace un ejercicio, para ver si ha entendido. Y tiene la oportunidad de equivocarse, con el profesor presente y dispuesto a corregirlo.

ESCENA 12

Pizarra



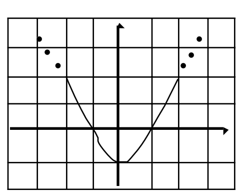


Libro : 1-5

Actividad (3 minutos, pizarra)
Acompañar la lectura del estudiante.
Comentario
La acción que se sugiere al final de la página es esclarecedora para los estudiantes. Conviene explicarla bien, dibujando inclusive el muñeco sobre el eje apropiado para que el alumno se haga la imagen completa.
No tiene sentido hablar de dominio de una función : la noción de dominio que se está dando es la de una curva. Esta noción es combinada posteriormente con la de dominio de fórmula, cuya formulación se hace utilizando el lenguaje algebraico. Todo ello prepara al alumno para la formulación de la noción de dominio de una función, que es mucho menos operativa y más abstracta.

ESCENA 13

Pizarra



Libro : 1-5

Actividad (2 minutos, pizarra)

Completar desde la pizarra y preferiblemente con la participación de los estudiantes :

Ejemplos	Dominio	Rango
1		

Comentario

ESCENA 14

Pizarra

Completar en la Página 1-5 la tabla para el Ejemplo 2 de la Página 1-2:

Libro : 1-5 y 1-2

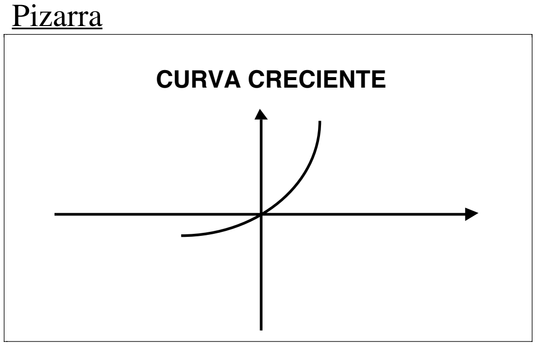
Actividad (3 minutos, pupitre)

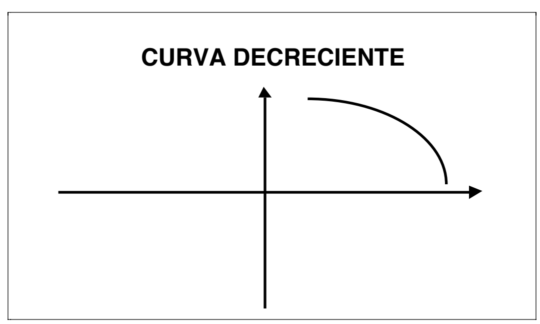
Comentario

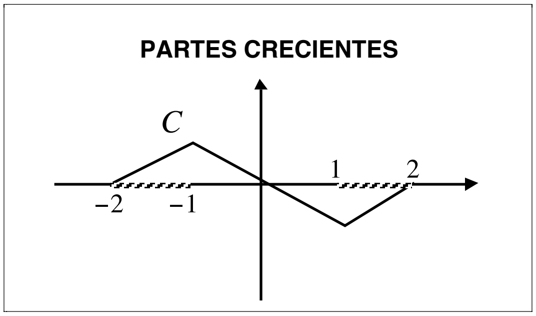
A estas alturas ya debe estar claro para los alumnos el funcionamiento de la parte de propiedades de curvas del libro MG, explicado en detalle en los comentarios de la Escena 6 de este capítulo.

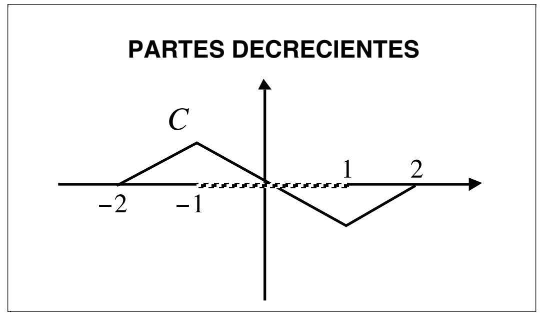
ESCENA 15

Pizarra









Libro : 1-6

Actividad (3 minutos, pizarra)

Dar las explicaciones correspondientes a las figuras de la pizarra.

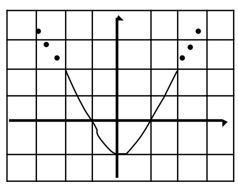
Comentario

La idea del muñeco sigue siendo útil, pero adaptada a este nuevo concepto : en este caso el muñeco debe caminar sobre la curva y además “de izquierda a derecha”.

Es importante hacer notar que se debe poner los intervalos de crecimiento separados por comas. (Ya que el hecho de que una función sea creciente en A y B no implica que lo sea en $A \cup B$).

ESCENA 16

Pizarra



Libro : 1-6

Actividad (5 minutos, pizarra y pupitre)

Ejemplos	Crece en	Decrece en
1		
2		

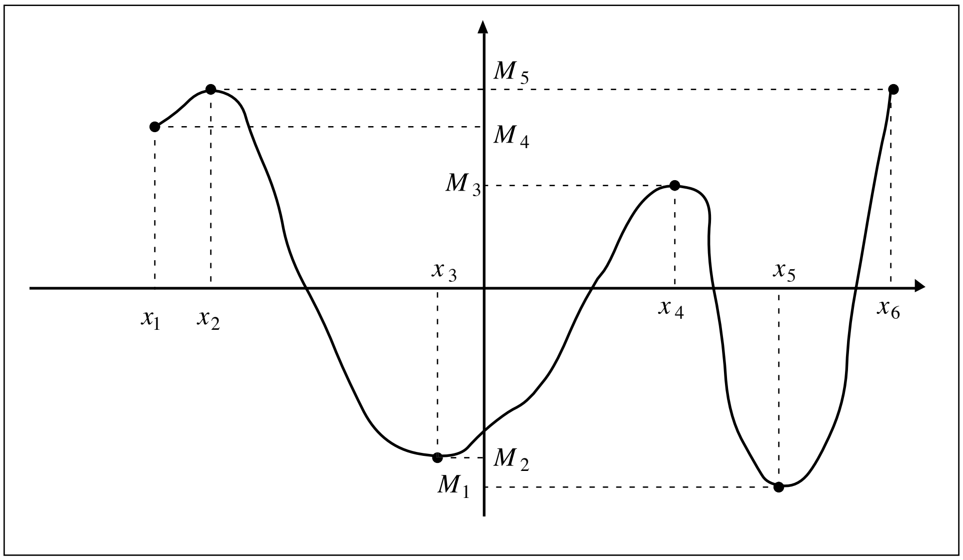
El profesor completa el ejemplo 1 desde la pizarra y los alumnos, en el pupitre hacen el 2.

Comentario

Hay tendencia, entre los alumnos, a señalar el intervalo de crecimiento en el eje y. Usted lo notará cuando se mueva entre los pupitres. Al final de la actividad conviene hacer la aclaratoria, desde el pizarrón, de que los intervalos de crecimiento o decrecimiento se estudian siempre con respecto al eje x.

ESCENA 17

Pizarra



Libro : 1-7

Actividad (5 minutos, pizarra)

Comentario

Este tema es muy delicado. Existen al menos dos tipos de problemas :

Primero el número de nociones del tópico

Distinguir entre extremos absolutos y relativos.

Distinguir entre extremo y dónde es alcanzado.

Un último aspecto es tener claro que si es absoluto también es relativo.

Algunas metáforas resultan a veces útiles. Por ejemplo para lo de absoluto y relativo puede resultar útil el comparar con campeón mundial y campeón de un país, respectivamente. Evidentemente el campeón mundial es campeón en su país.

Para distinguir entre extremo y dónde es alcanzado, sirve la comparación con el récord y el campeón. O bien la mayor altitud de un país y el pico donde se alcanza esa altitud.

El segundo tipo de dificultades proviene de **la capacidad para reconocer los puntos extremos en la curva.** En particular la noción de máximo o mínimo relativos.

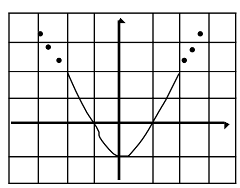
El muñeco es nuevamente útil en este caso. Es conveniente tomarlo caminando de izquierda a derecha. En base al muñeco y su movimiento se puede enunciar una condición necesaria para ser máximo : llegando al punto desde la izquierda el muñeco debe estar subiendo. Pero esto es suficiente sólo si no existe curva “después” de donde llegó el muñeco. En caso de que exista curva a la derecha, el muñeco debe “bajar” a partir del punto que se está verificando cuya altura es máxima.

Una hipótesis para explicar las dificultades que tiene el alumno con este concepto es que no está relacionado siempre con la forma de la curva. Y esto hace que existan situaciones más fácilmente reconocibles por el alumno. Son justamente aquellas que tienen forma de cima ($\cap$) o bien, forma de hondonada ($\cup$). Situaciones de puntos aislados o al final de una componente conexa de la curva causan mayores dificultades.

La formulación de máximo local, en términos puramente matemáticos, envuelve tanto la definición de máximo como la noción de vecindad. Esto es difícil para el estudiante que ingresa. Hay que tomar conciencia de que ni siquiera entiende y maneja con fluidez lo que significa $f(x)$ en la gráfica. Por ello, buena parte de la enseñanza del primer semestre de cálculo consiste en facilitar la comprensión profunda y manipulación de las nociones que “están detrás” de lo que se designa con $f(x)$.

ESCENA 18

Pizarra



Libro : 1-8

Actividad (2 minutos, pizarra)

Completar

Ejemplos	Max.Abs	Alcanzado en	Max.Rels	Alcanzados en
1				

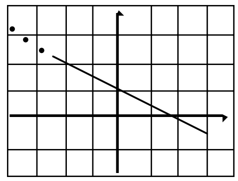
y

Ejemplos	Min.Abs	Alcanzado en	Min.Rel	Alcanzados en
1				

Comentario

ESCENA 19

Pizarra



Libro : 1-8

Actividad (3 minutos, pupitre)

Ejemplos	Max.Abs	Alcanzado en	Max.Rels	Alcanzados en
2				

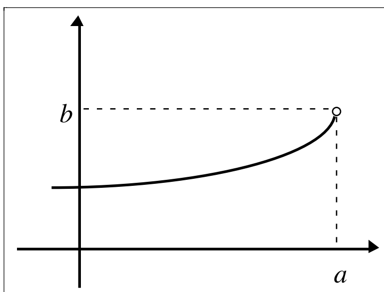
y

Ejemplos	Min.Abs	Alcanzado en	Min.Rel	Alcanzados en
2				

Comentario

ESCENA 20

Pizarra

	¿Porqué b no puede ser el máximo de la curva? ¿Porqué la curva del gráfico no tiene máximo?

Libro : 1-7

Actividad (2 minutos, pizarra)

Pequeña discusión sobre lo que los alumnos responden a las preguntas.

Para discutir la segunda pregunta, se puede hacer un ejemplo análogo, donde a sea designado con el número 2 y b con el tres. Razonar para ver que ningún número arbitrariamente cercano a 3 (pero menor) puede ser máximo. Por ejemplo, si se piensa que 2,9 es el máximo, se puede ver que es superado por 2,99. Y 2,99 es la altura de algún punto de la curva. Si se trata de situar esos valores sobre el eje y, no se puede (porque el grueso de la tiza no lo permite). Se puede hacer un "zoom" para poder dibujar esas dos alturas. Si llamamos P el punto de la curva que tiene altura 2,9 y Q el punto de la curva que tiene altura 2,99, se ve, en el zoom, que el muñeco al ir de izquierda a derecha y saliendo de P, va a subir (porque la curva es creciente). Por lo tanto 2,9 no puede ser máximo.

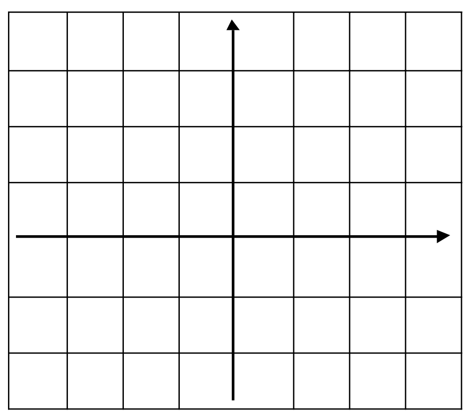
Comentario

Esta actividad tiene que ver con razonamientos sobre límites y topología. Es conveniente presentarla pero no insistir demasiado en ella.

FASE FINAL

ESCENA 21

Pizarra



Dominio $= [0, 3]$, *creciente*

Libro : 1-11

Actividad (10 minutos, pupitre)

Hacer varios ejercicios de la página 1-11.

Comentario

Este tipo de actividades : dibujar una curva que cumpla con ciertas especificaciones, es fundamental para el aprendizaje del tema. Decir que desarrolla la imaginación es algo vago, pero tiene algo de cierto.

La situación plantea una serie de “novedades” para el estudiante.

Las posibles respuestas forman una clase de gráficas : en general esa clase tiene más de un elemento y a veces ninguno. Esto es algo novedoso para el estudiante.
Otra novedad es que la situación no es algorítmica : el alumno no sigue un algoritmo (una sucesión de pasos preestablecidos) para dar la respuesta.
Es una situación de ensayo y error manejable por el alumno. Lo que se acaba de estudiar en las otras escenas (esas actividades sí son algorítmicas.), son los elementos de que dispondrá el alumno para comprobar si la respuesta (su ensayo o prueba) dada por él, es correcta (o es un error). Por otro lado esa curva es "aceptada como correcta" porque cumple con las condiciones.
Es una situación de producción significante : en la relación profesor-alumno el objeto "producido" permite al profesor constatar si el alumno **entiende el significado de un concepto**.

Precisiones sobre estos comentarios generales pueden ser obtenidas en P. Alson, 2001, “Elements pour une théorie de la signification en didactique des mathématiques”. Tesis de Doctorado, Universidad Bordeaux 1. Está escrita en español y nos referiremos a ella en el texto, con [1].

CLASE 3

VISION GLOBAL

El objetivo de esta clase es terminar de cubrir los aspectos conceptuales esenciales del Capítulo 1 de MG.

En la fase inicial se debe dar la oportunidad de tocar los conceptos de la clase anterior y en particular repasar las nociones sobre extremos.

De los conceptos básicos sólo queda por ver el de cota. El trabajo con este concepto es la primera actividad de la fase media de la clase.

Los otros aspectos de la fase media son :

el trabajo con la notación $f(x)$(1-14 a 1-16).

el trabajo con situaciones que envuelven cuantificadores aunque no se usen explícitamente (1-17 a 1-24).

La fase final sirve para introducir la página 2-1 : los caminos fundamentales.

FASE INICIAL

ESCENA 1

Pizarra

Dudas.

Libro : Capítulo 1

Actividad (15 minutos, pizarra, pupitre o consulta individual)

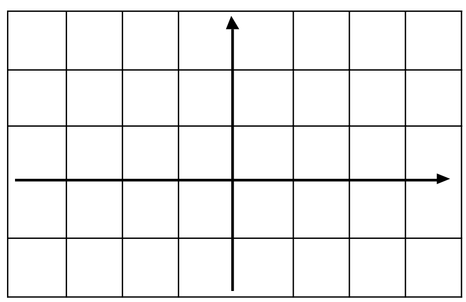
Asentamiento de los conceptos de la clase pasada.

Comentario

A estas alturas todavía suele haber un buen número de estudiantes que no ha adquirido el libro. Y muchas de las dudas son todavía del Capítulo 0.

ESCENA 2

Pizarra



$Dominio = (-1, 2)$, $conexa$

Tiene dos puntos de corte con el eje x

Máximo absoluto alcanzado solo en 0

Libro : 1-12

Actividad (5 minutos, pupitre)

Hacer ejercicios de la página 1-12.

Comentario

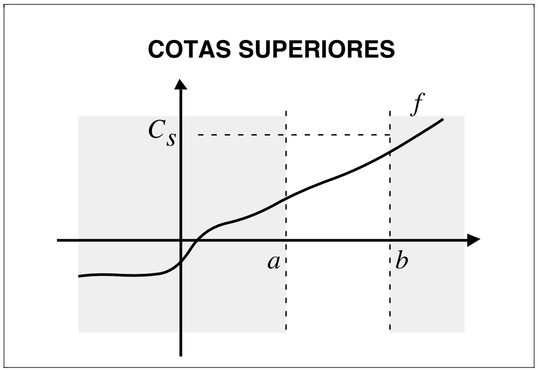
A los alumnos, les cuesta mucho entender que un absoluto es también relativo. Los ejercicios del tipo de la pizarra les hacen chocar con la diferencia entre "máximo" y "alcanzado en".

Al concluir la actividad se puede utilizar la experiencia adquirida con el ejercicio para rediscusión de los conceptos de máximos y mínimos , absolutos y relativos.

FASE MEDIA

ESCENA 3

Pizarra



Libro : 1-9 y 1-10

Actividad (6 minutos, pizarra)

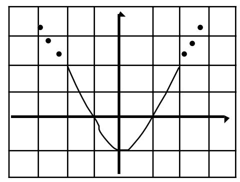
Explicar el concepto de cota superior. Hacer notar que la intención del sombreado es que el lector concentre su mirada en la parte no sombreada. En esa zona se ve que la recta punteada está encima de la curva. (Las zonas sombreadas no interesan porque corresponden a partes del eje x que están fuera del intervalo donde se está estudiando la cota).
La explicción debería incluir algunas de las respuestas (dadas de manera justificada) del primer ejercicio de la página 1-10.

Comentario

Los alumnos tienden a pensar que hay una sola cota superior. Es por ello que al final de la página 1-10, se piden dos cotas en vez de una.
Los alumnos no suelen hacer mucho caso que la cota suele referirse a un intervalo específico. El ejercicio del final de la página 1-10, trata, al pedir cotas de la misma curva en diferentes conjuntos, de insistir sobre este aspecto.

ESCENA 4

Pizarra



Libro : 1-10

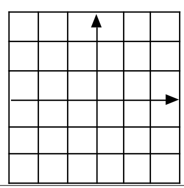
Actividad (3 minutos, pupitre)

Completar la primera línea del último ejercicio de la página 1-10.

Comentario

ESCENA 5

Pizarra



$f(-2) = -2$

$f(1) = 1$

$f(2) = 2$

Libro : 1-14

Actividad (2 minutos, pizarra)

Mostrar cómo se hace el ejercicio.

Comentario

ESCENA 6

Pizarra

Libro : 1-14

Actividad (3 minutos, pupitre)

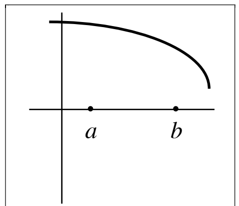
Hacer alguno de los ejercicios de 1-14, que el profesor haya seleccionado para hacer.

Comentario

Algunos alumnos quedan un poco desconcertados cuando la condición no es una igualdad. Por ejemplo cuando la condición es $f(2) > 0$. Por ello es recomendable mandarles a hacer algun ejercicio que tenga condiciones de ese tipo.

ESCENA 7

Pizarra



$f(a) > f(b)$	☐
$f(a) < f(b)$	☐
$f(a) \leq f(b)$	☐
$f(a) \geq f(b)$	☐
$f(a) = f(b)$	☐

Libro : 1-15

Actividad (3 minutos, pizarra)

Completar el ejercicio que está en la pizarra.

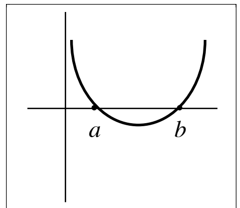
Comentario

Al igual que la mayoría de las actividades del capítulo, las respuestas sólo se pueden obtener mirando las curvas. En ese sentido este ejercicio, como la mayoría de los del capítulo, encierra una actividad de simbolización que es fundamental a la hora de enunciar formalmente las definiciones del cálculo elemental.

Se ha observado que la interpretación gráfica de la condición $f(a) \geq f(b)$ causa más dificultades que la condición $f(a) > f(b)$. (A algunos alumnos les parece que $f(a) > f(b)$ implica que $f(a) \geq f(b)$ no se cumple). Es conveniente aclarar cuando preguntan al respecto que para que $f(a) \geq f(b)$ sea cierta basta con que se cumpla $f(a) > f(b)$ o $f(a) = f(b)$. Es decir, que no se cumpla $f(a) < f(b)$.

ESCENA 8

Pizarra



$f(a) > f(b)$	☐
$f(a) < f(b)$	☐
$f(a) \leq f(b)$	☐
$f(a) \geq f(b)$	☐
$f(a) = f(b)$	☐

Libro : 1-15

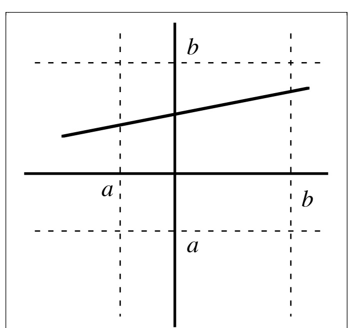
Actividad (3 minutos, pupitre)

Hacer el ejercicio de la pizarra

Comentario

ESCENA 9

Pizarra



$f(b) > f(a)$	☐
$f(a) > f(b)$	☐
$f(a) > a$	☐
$f(a) > b$	☐

$f(b) > a$	☐
$f(b) > b$	☐
$f(a) = a$	☐
$f(b) = b$	☐
$f(a) = b$	☐
$f(b) = a$	☐

Libro : 1-15

Actividad (3 minutos, pizarra y pupitre)

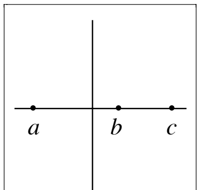
El profesor (desde la pizarra) puede contestar alguna de las preguntas y el alumno (en su pupitre) otras.

Comentario

Otro aspecto que tiene que ver con este tipo de ejercicios es el hecho de que algunos alumnos no interpretan $f(x)$. Están entrenados por bachillerato a hacerle caso a la letra x, debido a que ella aparece en el contexto de las ecuaciones, representando la incógnita. Probablemente por ello su reacción ante $f(x)$ es inapropiada. También interpretar $f(2)$ les es difícil : se concentran en el 2 y tratan de evadir la f. La interpretación gráfica de $f(a) < a$, necesaria para contestar la validez o no de la expresión, va directamente al encuentro de esa deficiencia.

ESCENA 10

Pizarra



$f(a) < f(c)$
$f(a) < f(b)$

Libro : 1-16

Actividad (3 minutos, pupitre)

El profesor debería indicarles que lo único que tienen que hacer es una curva, pero que esa curva debe cumplir las dos condiciones que aparecen en el recuadro, debajo del plano cartesiano.

Comentario

Este ejercicio, así como los otros de la página 1-16 son el ejercicio inverso de los de la página 1-15. En aquellos se tenía una curva y se quería ver cuáles condiciones eran satisfechas. En estos se dan las condiciones y el alumno debe construir una curva que satisface las condiciones.

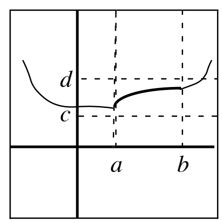
ESCENA 11

Pizarra

$$\boxed{Si\ \ x \in [a,b]\ entonces\ f(x) \in [c,d]}$$

y

$f(x) \in [c,d]$



$Si\ \ x \in [a,b]$

Libro : 1-17

Actividad (5 minutos, pizarra y pupitre)

Explicar la condición. Mostrar porqué la curva de la figura cumple con ella. Hacer notar que el segmento de curva que está corresponde a $[a,b]$ es más grueso que el que está por fuera de ese intervalo. Pedir que hagan, en el pupitre, algún ejercicio de la página.

Comentario

Este tipo de afirmaciones es complicado para los estudiantes.

La condición $Si\ x \in [a,b]\ entonces\ f(x) \in [c,d]$ es equivalente a $f([a,b]) \subseteq [c,d]$. La mayoría de los estudiantes la interpreta como $f([a,b]) = [c,d]$. Refiriendose al dibujo de la pizarra se les puede preguntar si $f(x)$ está en todo $[c,d]$ o sólo una parte.

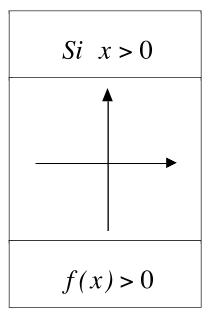
Los ejercicios de la página 1-21, van al encuentro de esta interpretación estrecha (parcialmente errada) de la condición.

Otro aspecto es que $Si\ x \in [a,b]$ es interpretado como que el dominio de f es $[a,b]$.

Para enfrentar (al menos parcialmente) estas malas interpretaciones está el enunciado del ejercicio de la página 1-17 : se pide que el dominio de la f que van a dibujar sea todo R.
Por otro lado como todas las preguntas admiten como respuestas casi triviales rectas paralelas al eje x, se pide que la respuesta no sea de ese tipo.
Los ejercicios que van de 1-17 a 1-24 inclusive son ejercicios que tienen que ver con cuantificadores. Se ha evitado su uso explícito, porque el nivel real de nuestros estudiantes les impide establecer una “relación efectiva” con dichos operadores lógicos. Esta carencia debe ser subsanada por el discurso apropiado del profesor, con indicaciones precisas en cada caso.
Todos esos ejercicios son preparatorios para nociones que tienen que ver con las inecuaciones y con la definición de límite para funciones reales.

ESCENA 12

Pizarra



Libro : 1-18

Actividad (4 minutos, pizarra y pupitre)
Explicar cuál es la respuesta que se quiere. (Es necesario porque el cuantificador no está explicitado). Se puede hacer una curva que sea respuesta y una que no lo sea y hacer ver por qué no lo es. Mandar a hacer en el pupitre uno de los ejercicios de la serie.

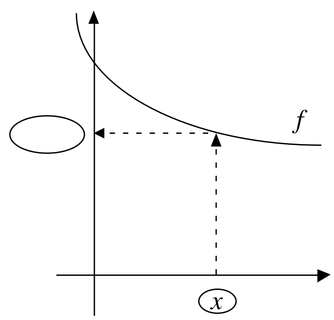
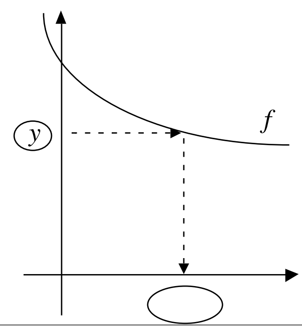
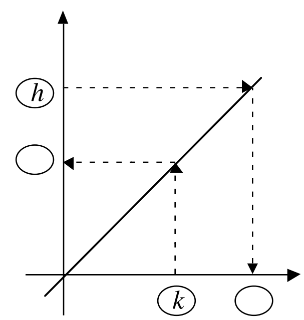
Comentario
Esta es otra situación donde el alumno debe considerar el símbolo $f(x)$. Es también una reformulación de los ejercicios de la página 1-17.

FASE FINAL

ESCENA 13

<u>Pizarra</u>

<u>LOS TRES CAMINOS FUNDAMENTALES.</u>

IDA	**VUELTA**	**Por la BISECTRIZ**
		
Va del eje x al eje y	Va del eje y al eje x	La esquina está en la bisectriz.

<u>Libro : 2-1</u>

<u>Actividad (3 minutos, pizarra)</u>

Ayudarlos a leer y completar la parte de los caminos fundamentales de la página 2-1 que aparece en la pizarra. Hacer preguntas del tipo :

¿Qué diferencia un camino de ida de un camino de vuelta?

Leer con los alumnos las indicaciones (que aparecen a continuación y que están en la página 2-1) para dar los nombres de los puntos finales : **de acuerdo a lo que se lea, proceder**.

Nombre del punto final: se pone entre paréntesis el nombre del punto inicial. Y a la izquierda del paréntesis se pone el nombre de la curva	**Nombre del punto final:** se pone entre paréntesis el nombre del punto inicial. Y a la izquierda del paréntesis se pone el nombre de la curva, con -1 en la posición de exponente. (Esto para distinguirlo de los nombres de caminos de ida).	**Nombre del punto final:** el nombre del punto final es igual al nombre del punto inicial.

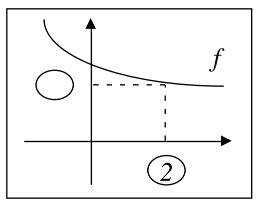
Al proceder aparecen dudas: ¿A quién se refieren con punto final? ¿Con punto inicial? (Hay que identificarlos en los caminos del dibujo). ¿Cómo se sabe cuál es el nombre de la curva?. ¿Tiene la bisectriz un nombre? ¿Es designada con una letra?. ¿Dónde sobre el dibujo se va a poner el nombre del punto final? etc.

Comentario

Estos tres conceptos fundamentales para buena parte del libro. Son la base para poder hacer caminos que permiten construir curvas compuestas y curvas inversas de manera geométrica. Los caminos son un elemento semiótico que está ausente de la mayoría de los libros de cálculo elemental. Su introducción facilita una serie de actividades dentro del plano y actividades de simbolización. Estudios didácticos de estos objetos pueden verse en P. Alson, 2001, [1].

ESCENA 14

Pizarra



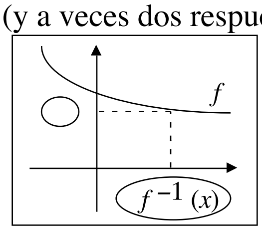
Libro : 1-2

Actividad (3 minutos, pupitre)

Hacer este ejercicio y todos los de su serie.

Comentario

En algunos casos hay ambigüedades, (y a veces dos respuestas posibles), como en el caso de



porque el camino que aparece dibujado no tiene una flecha marcada y por lo tanto podría tomarse como de ida o de vuelta. Las simbolizaciones obtenidas no son las mismas en los dos casos, pero son equivalentes. Sin embargo a estas alturas tiene poco sentido intentar mostrar que son equivalentes. Basta con tranquilizar a los estudiantes que ven las dos simbolizaciones, diciendoles que ambas son correctas. En estos ejercicios a veces (y a propósito) el nombre del punto inicial es complicado. En esos casos algunos alumnos tienen dudas en la aplicación de las convenciones.

CLASE 4

VISION GLOBAL

En esta clase se debe terminar con el primer capítulo. Y cubrir los conceptos del segundo capítulo.

> Terminar el Capítulo 1, esto se debería hacer en la Fase inicial de la clase. Se trataría de responder preguntas y luego hacer algunos ejercicios relevantes que no fueron tratados en la clase anterior.
>
> Con respecto al Capítulo 2, se trata de dar el esqueleto conceptual del capítulo. Y por ello hay que saltar (con la idea de volver sobre lo hecho en la siguiente clase). Habría que introducir : nombre de caminos "complicados". Curva inversa. Suma, producto y cociente de curvas. Para ello se debe saltar y no cubrir todo lo referente a cada uno de los puntos en esta clase. Completar los puntos cubiertos y dar el concepto de curva compuesta, debería hacerse en la segunda clase del capítulo.

FASE INICIAL

ESCENA 1

<u>Pizarra</u>

De acuerdo a las dudas que tengan o planteen los alumnos.

<u>Libro : Capítulo 1</u>

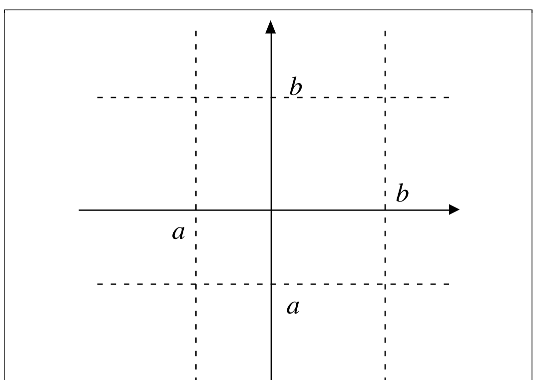
<u>Actividad (10 minutos, pizarra, pupitre o consulta individual)</u>

<u>Comentario</u>

Esta actividad es importante porque es la última antes del quiz del capítulo 1.

ESCENA 2

<u>Pizarra</u>



$$x \in [a, b] \ \ entonces \ \ f(x) \in [a, b]$$
$$x \in [a, 0] \ \ entonces \ \ f(x) \in [0, b]$$
$$x \in [0, b] \ \ entonces \ \ f(x) \in [a, 0]$$

<u>Libro : 1-22</u>

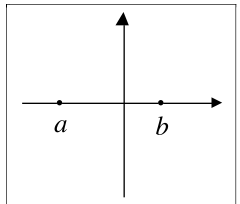
<u>Actividad (4 minutos, pupitre)</u>

Hacer el ejercicio.

<u>Comentario</u>

ESCENA 3

Pizarra



Si $x \neq b$,

$f(x) < f(b)$

Libro : 1-23

Actividad (4 minutos, pizarra y pupitre)

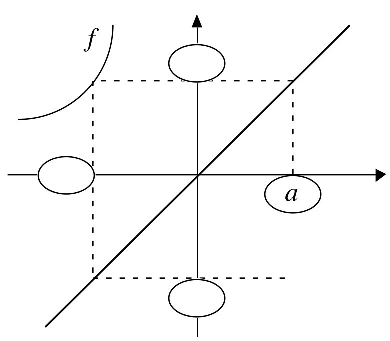
Comentario

La condición *Si* $x \neq b$, $f(x) < f(b)$ causa confusión en los alumnos.

FASE MEDIA

ESCENA 4

Pizarra



Libro : 2-2

Actividad (2 minutos, pizarra)

Mostrar cómo se usan las convenciones de la página anterior para nombrar las coordenadas y el punto final del camino.

Comentario

En algunos alumnos existe la tendencia de pensar que la elipse vacía del eje x es de un punto simétrico al inicial y de ahí nombran ese punto $-a$. Esto, evidentemente, no es correcto.
Hacer notar que un camino "complicado" se puede ver como la "unión" o "sucesión" de varios caminos fundamentales. Conviene hacerle ver al alumno que hay que ir de eje a eje, y en cada caso aplicar una de las tres convenciones de la página 2-1.
Al ir a poner un nombre la pregunta clave es :

¿de cuál eje estoy saliendo y en cual curva está "la esquina"?.

ESCENA 5

Pizarra

Hacer ejercicios de las páginas 2-2 y 2-3.

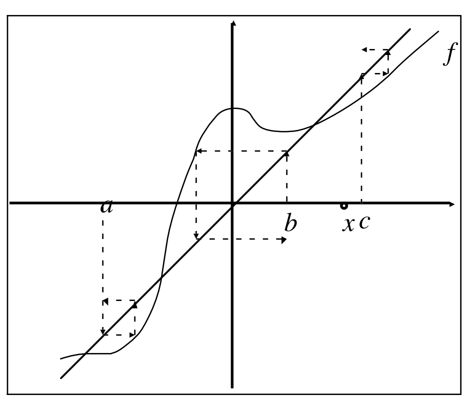
Libro : 2-2 y 2-3

Actividad (8 minutos, pupitre)

Comentario

ESCENA 6

Pizarra



Libro : 2-4

Actividad (4 minutos, pizarra)

Ponerle nombre a esos caminos (esto lo puede hacer el profesor en la pizarra, acompañado por los alumnos, para que no sea demasiado lento). Sirve de repaso de codificación. Hacer notar que los puntos finales están siempre sobre la vertical que pasa por el punto inicial del camino. Hacer notar que los nombres de los puntos finales son los mismos salvo la letra que está entre paréntesis : ella es el nombre del punto de salida.
Ver el orden de las esquinas : ojo a veces a estas alturas hay alumnos que no identifican qué son las esquinas. Conviene ver primero todas las primeras esquinas y marcarlas con un color de tiza, luego todas las segundas esquinas y finalemente todas las terceras esquinas y luego proceder a responder ¿En cuál curva están las primeras esquinas?
¿En cuál curva están las segundas esquinas?
¿En cuál curva están las terceras esquinas?
Pedir que en la página 2-4, lean

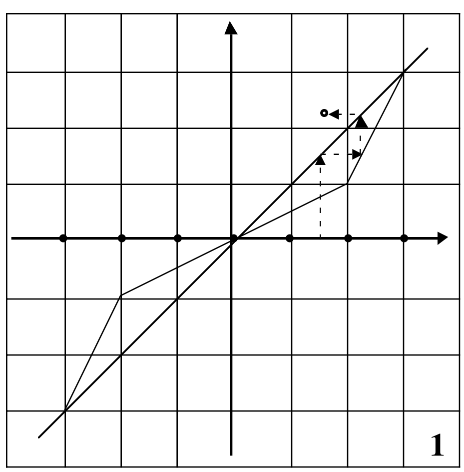
Punto de Partida- Bisectriz- Curva- Bisectriz- Punto final.

y preguntar si entienden esa frase (la frase resume lo que se ha observado y sirve para hacer otros caminos inversos rápidamente).
Se puede hacer un camino sobre el dibujo que no sea inverso y preguntarles si cumple con la secuencia de esquinas del camino de la inversa.

Comentario

ESCENA 7

Pizarra



Libro : 2-5

Actividad (8 minutos, pizarra y pupitre)

Aquí, a pesar de la actividad anterior no suele ser claro para ellos lo que hay que hacer. Por ello conviene que en la pizarra el profesor haga el ejercicio que corresponde a la figura. Y luego los estudiantes los ejercicios restantes de la página.
Es importante que ellos hagan los caminos y saquen algunas conclusiones. El profesor debe intervenir para ver si los caminos están bien hechos. El fenómeno de bifurcación no es natural. También llama la atención los puntos cuyo camino no tiene final. Y hay algunos puntos para los cuales el camino es “degenerado”.

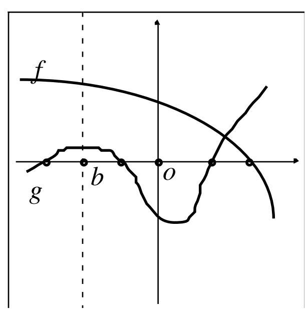
<u>Comentario</u>

El objetivo de la página 2-5 es hacer que el alumno descubra cuál es la relación geométrica que tienen una curva y su inversa. Esto, después de haber hecho los ejemplos de la página, debería ser obtenido por ellos como una respuesta a una pregunta planteada por el profesor.

ESCENA 8

<u>Pizarra</u>

Con una sola vertical. El problema es situar un punto sobre la vertical.
(Note que el dibujo que aparece en la pizarra es una versión simplificada de la figura del libro, esto es para concentrar la discusión en una sola vertical)



<u>Libro : 2-10</u>

<u>Actividad (8 minutos, pizarra y pupitre)</u>

Se debe colocar un punto en la vertical que pasa por b.
La altura del punto viene dada por $f(b)+g(b)$. ¿Dónde situarlo?.

Lo primero es entender qué significa $f(b)+g(b)$ y para ello hay que entender qué significan $f(b)$ y $g(b)$. Se puede por ejemplo preguntar ¿cuál es el signo de $g(b)$?, ¿Quién es más grande entre $f(b)$ y $g(b)$? ¿Hay alguno de ellos dos que es negativo?

Después que se haya entendido el significado de $f(b)+g(b)$ hay que discutir con los alumnos dónde (razonablemente) se debería poner un punto de altura $f(b)+g(b)$. Señalar que hay cuatro opciones:

Por debajo del eje x

Entre el eje x y la curva g

Entre las dos curvas

Por encima de la curva f

La discusión es para ir descartando posibilidades y quedarse con la única posible.

Luego se puede trazar otra vertical (Por ejemplo donde una curva sea negativa y otra positiva) y preguntarles dónde situarían el punto correspondiente. Si alguno da una respuesta incorrecta, hacer la argumentación que muestra que es incorrecta.

Finalmente es bueno hacer una vertical por algún punto de corte (de alguna de las curvas) con el eje x.

Y otra por un punto de corte de dos curvas.

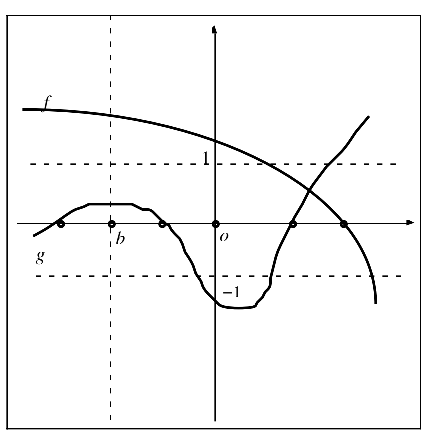
Dejar el ejercicio inconcluso (en el libro lo tienen que completar pero eso lo pueden hacer en práctica o casa).

<u>Comentario</u>

El trabajo sobre una vertical es fundamental. El segundo aspecto es saber cuales verticales escoger para que el gráfico resultante sea una buena aproximación al gráfico verdadero. Es preferible cubrir este aspecto en la próxima clase.

ESCENA 9

<u>Pizarra</u>



Libro : 2-15

Actividad (8 minutos, pizarra y pupitre)

Esta actividad es muy parecida a la de la suma. De hecho eso es lo que hay que decirle a los alumnos. Pero ahora la altura de los puntos viene dada por

$$f(b)\cdot g(b)$$

Por lo tanto hay que hacer la multiplicación de las alturas. La discusión gira alrededor de los signos y luego sobre cómo es la magnitud de las alturas de las curvas (en una vertical) con respecto a las rectas de altura 1 y -1 . Pregunte cuál es la diferencia de este dibujo con el de la página 2-10.

Al igual que en la suma, se tienen cuatro alternativas para situar el punto, pero el razonamiento es diferente, debido a que ahora se trata de un producto :

Por debajo del eje x

Entre el eje x y la curva g

Entre las dos curvas

Por encima de la curva f

En este caso la alternativa válida es "Entre las dos curvas". Explicación :

$f(b)$ es mayor que 1 y por lo tanto $f(b)\cdot g(b)$ es mayor que $g(b)$ y por lo tanto el punto debe estar más arriba de la curva g.

Pero por otro lado como $g(b)$ está por debajo de 1, $f(b)\cdot g(b)$ es menor que $f(b)$ y por lo tanto el punto debe estar más abajo que la curva f.

Al estar más arriba que la curva g y más abajo que la curva f, está "entre las dos curvas"

Además, si uno se pone cuidadoso pareciera que va a estar muy cerca de 1, pero es difícil estar seguro.

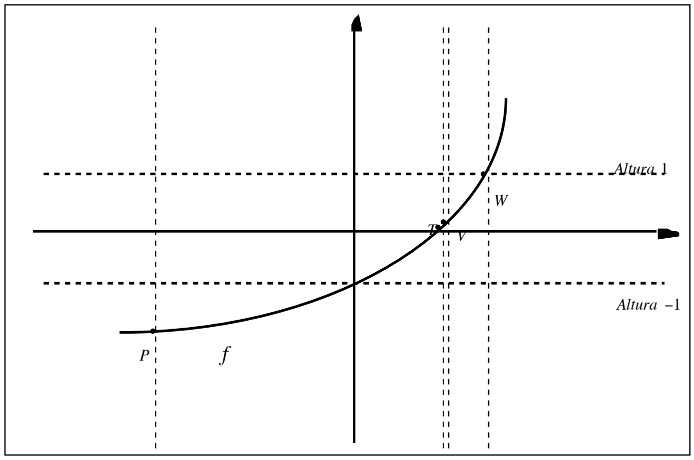
Nuevamente conviene hacer dos o tres verticales (una que pase por un corte de curva con el eje x, otra que pase por el corte de dos curvas, otra por el corte de una de las curvas con la recta de altura 1 o -1 .

Evitar seguir con la página y pasar a introducir la noción de cociente de una curva .

Comentario

ESCENA 10

Pizarra



Libro : 2-20

Actividad (8 minutos, pizarra y pupitre)

Idem que en las dos actividades anteriores. Pero en este caso los hechos fundamentales que se quiere que comiencen a aparecer son:

1/"pequeño" ="grande".
1/"positivo"="positivo".
Esto se ve en la recta que pasa por V
Luego:
1/"grande"= "pequeño".
1/"negativo" = "negativo".
Esto se medio ve en la recta que pasa por P
La vertical de W es importante porque el nuevo punto sigue estando sobre la curva (porque 1/1=1).
Es bueno disponer de una calculadora para ver que 1/0 da error. Relacionar este hecho con el de que en la vertical que pasa por un punto de corte con el eje x no se puede situar ningún punto, porque no se puede situar un punto a la altura error.

Comentario

FASE FINAL

No hay

CLASE 5

VISION GLOBAL

En esta clase debe terminarse el Capítulo 2.

Por un lado falta el camino de la compuesta.

Y por otro lado hay que hacer un conjunto de actividades finas cuya finalidad es ir adquiriendo una visión global de las operaciones gráficas expuestas en la clase pasada.

La fase final puede cerrar en un comienzo del Capítulo 3. Introduciendo el diagrama.

Los objetos que debe producir el alumno, evidentemente no "son" la representación perfecta de sus nombres (cuando se pide graficar $f+g$, se sabe de antemano que el dibujo producido por el alumno no va a ser exactamente la representación en el plano cartesiano del gráfico de $f+g$). Siempre son objetos aproximados, deberían llamarse "**esbozos**". Estos esbozos constituyen de hecho una clase. El punto está en reconocer esa clase. Hay curvas que no pueden ser tomadas por esbozo y otras que sí pueden serlo.

En la clase anterior se ha estudiado **propiedades locales** de dichos objetos : se ha enseñando a situar un punto sobre la vertical. Se ha mostrado, que existen posiciones del punto sobre la vertical aceptables y hay posiciones inaceptables.

En esta clase se estudian **propiedades globales**. Estas propiedades son muy útiles porque facilitan la elaboración rápida de un esbozo aceptable. En particular evitan que se tengan que hacer demasiadas verticales y permiten precisar cuales verticales son claves para poner los puntos por donde debe pasar el esbozo.

El aspecto interesante es que la construcción de los esbozos exige la movilización de una serie de pequeños conocimientos de manera organizada. Esto posibilita un aprendizaje del indivíduo (una adaptación) que es útil para poder seguir razonamientos del cálculo elemental.

No es este el lugar apropiado para justificar el trabajo con los esbozos. O bien hacer hipótesis sobre el porqué están ausentes (explícitamente) de la mayoría de los cursos de cálculo. Sólo se pretende describir la naturaleza del trabajo que se debe hacer con ellos.

FASE INICIAL

ESCENA 1

Pizarra

"Dudas"

Libro : Cap 2

Actividad (15 minutos, pizarra, pupitre o consulta individual)

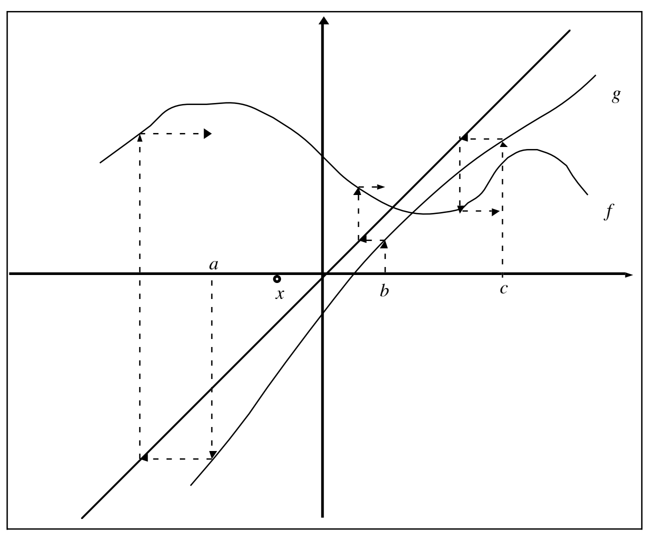
Aparte de responder dudas. Se puede hacer una pregunta de la página 2-6, para que vean la utilidad de lo presentado en la página 2-5.

Comentario

FASE MEDIA

ESCENA 2

Pizarra



Libro : 2-7

Actividad (5 minutos, pizarra)

Ponerle nombre a esos caminos. Hacer notar que los puntos finales están siempre sobre la vertical que pasa por el punto inicial del camino. Hacer notar que los nombres de los puntos finales son los mismos salvo el hecho de la letra que está entre paréntesis que es el nombre del punto de salida.

Ver el orden de las esquinas : ojo a veces a estas alturas hay alumnos que no identifican cuáles son las esquinas. Conviene ver primero todas las primeras esquinas y marcarlas con un color de tiza, luego todas las segundas esquinas y finalemente todas las terceras esquinas y luego proceder a responder

¿En cuál curva están las primeras esquinas?
¿En cuál curva están las segundas esquinas?
¿En cuál curva están las terceras esquinas?

Pedir que lean

Punto de Partida- Curva g- Bisectriz- Curva f- Punto final.

en la página 2-7 y preguntar si entienden esa frase (la frase resume lo que se ha observado y sirve para hacer otros caminos inversos rápidamente).

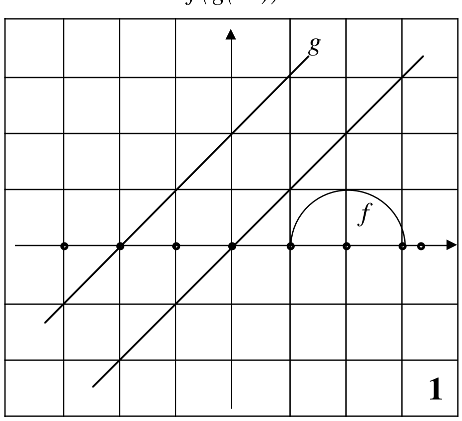
Comentario

La actividad sirve de repaso de codificación de puntos. Es similar a la que se hizo con el camino de la inversa. Pero no es conveniente hacer esas dos actividades en la misma clase.

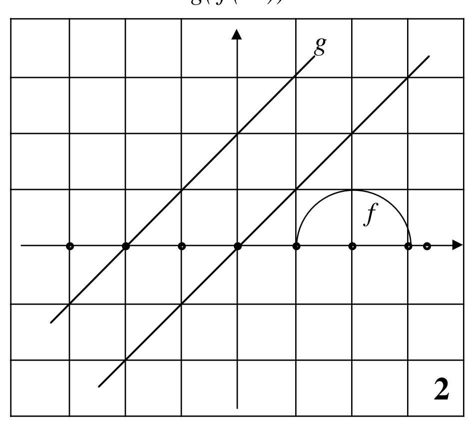
ESCENA 3

Pizarra

$f(g(\quad))$



$g(f(\quad))$



¿En los cuadros 1 y 2 las curvas son las mismas?_________________

En los cuadros 1 y 2 las curvas compuestas resultaron ser las mismas?_________________

¿ Es importante el orden de composición? ____
.

Libro : 2-8

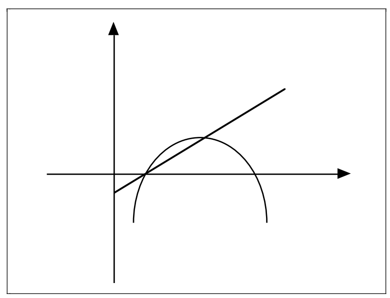
Actividad (6 minutos, pupitre).

Comentario

Esta actividad es para fijar y resolver dudas sobre el camino de la compuesta. Una conclusión de los ejercicios es que el orden de composición es insoslayable. Surgen problemas con caminos que tienen segmentos de longitud cero. etc.

ESCENA 4

Pizarra



Libro : 2-12

Actividad (3 minutos, pupitre)

Resolver el ejercicio.

Comentario

Son raros los alumnos que tienen la iniciativa de trazar algunas verticales. Hay que sugerirselo, después de dejarlos intentar. Luego viene la pregunta ¿Cuáles verticales trazar?. Los alumnos trazan de manera libre y arbitraria. Hay algunos alumnos que sólo trazan una. A esos (viéndolo en pupitre) hay que sugerirles que tracen un número mayor. En algunos casos el esbozo que hacen no es correcto. En esos casos el profesor puede sugerir al alumno una vertical para que vea que por el punto de la vertical no pasa la curva que él ha dibujado.

Cuando hablamos de "visión global", nos referimos al conocimiento de hechos del tipo :

> Hay algunas verticales sobre las que es más fácil operar. Y que contribuyen de manera más decisiva a dar una aproximación correcta del gráfico. Es conveniente plantear la discusión sobre cuáles son. La discusión debe ir orientada a que quede claro que los

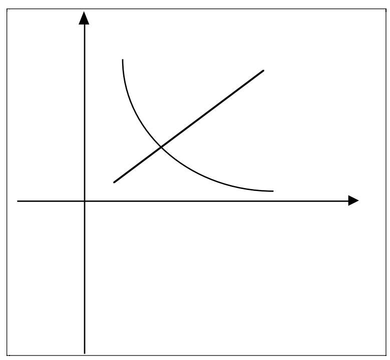
puntos de corte con el eje x son claves. Este es un hecho que habrá que seguir insistiendo en los capítulos 4 y 5.

Parte de esa visión global es saber que si un trozo **positivo** de curva f es sumado a una curva g la curva suma debe estar por encima de la curva. g. O bien, si las curvas tienen en un trozo signos contrarios, la curva suma debe estar entre ellas dos, etc.

No conviene insistir en esa visión global de manera mecánica, sino tratando siempre de razonar sobre el dibujo. En cuanto a los puntos claves siempre que se vaya a hacer una operación (suma, producto o cociente) hay que comenzar por preguntar : ¿Cuáles son los puntos claves?

ESCENA 5

Pizarra



Libro : 2-11

Actividad (3 minutos, pupitre)

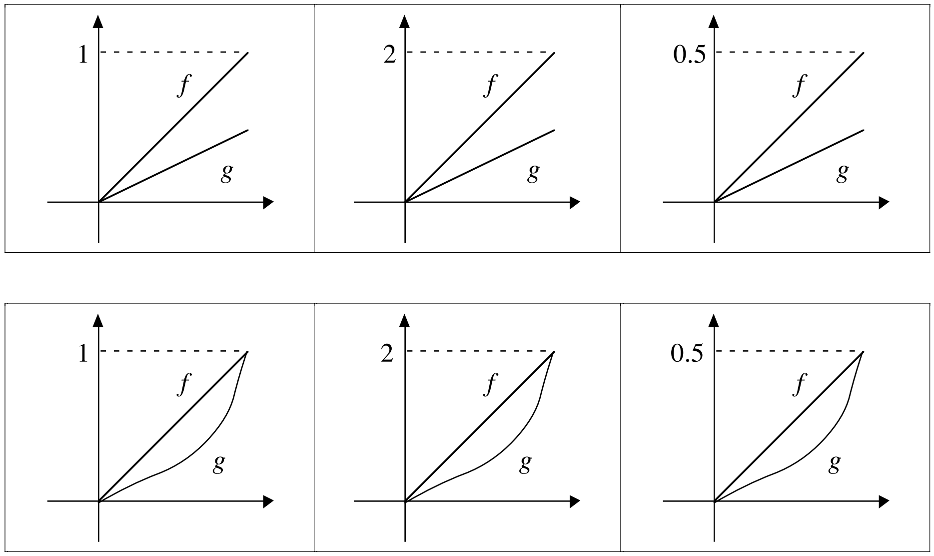
Resolver el ejercicio.

Comentario

Este ejercicio es interesante porque ninguna de las dos curvas tiene punto de corte con el eje x . Aquí el signo de las curvas es fundamental para graficar rápidamente. Los alumnos no suelen estar conscientes de ello y trazan algunas verticales. hay que dejarlos proceder de esa manera. Y luego señalarles el papel del signo : si las dos eran positivas, la curva suma debía estar por encima de las dos.

ESCENA 6

Pizarra



Libro : 2-16

Actividad (10 minutos, pupitre)

Hacer la curva producto en cada caso.

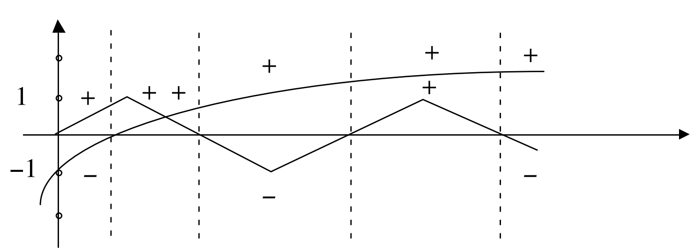
Comentario

Los ejercicios de esta serie son muy interesantes porque hacen ver la importancia de la escala en la forma de la curva resultado. Es conveniente como siempre sugerirles que tracen unas verticales para comenzar y luego hagan los puntos de cada una de ellas.

ESCENA 7

Pizarra

Observe atentamente la figura que sigue:



Libro : 2-18

Actividad (4 minutos, pizarra)

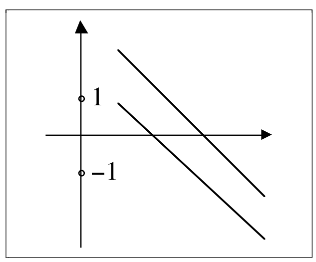
Se trata de presentar a los alumnos las consecuencias que tienen los signos de las curvas. (Partes positivas y partes negativas).

Comentario

Esto es parte del aprendizaje de propiedades globales del producto gráfico. Es importante pasar verticales por los puntos de corte con el eje x porque así se definen zonas de signo constante de la curva producto. Y además, la curva producto debe pasar por esos puntos de corte de las curvas con el eje x, porque "cero por algo es cero".

ESCENA 8

Pizarra



Libro : 2-17

Actividad (3 minutos, pupitre)

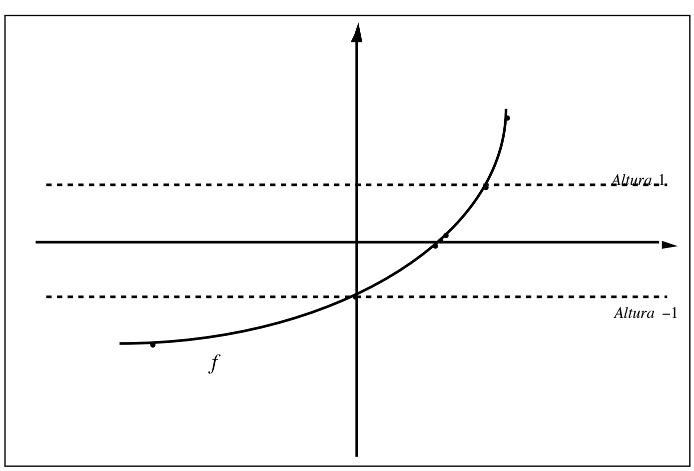
Hacer la gráfica producto.

Comentario

Sugerir que sólo tracen dos verticales. Este ejercicio es interesante porque el producto es una parábola.

ESCENA 9

Pizarra



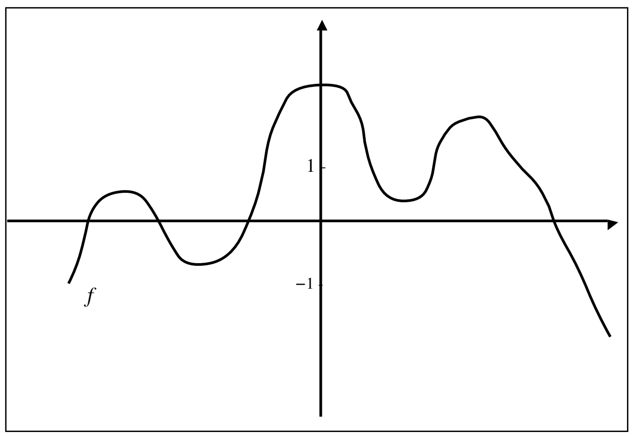
Libro : 2-23

Actividad (8 minutos, pizarra y pupitre)
Acompañar la lectura de la página 2-23.

Comentario
La finalidad es presentar las propiedades globales útiles para hacer rápidamente la curva cociente.

ESCENA 10

Pizarra



Libro : 2-23

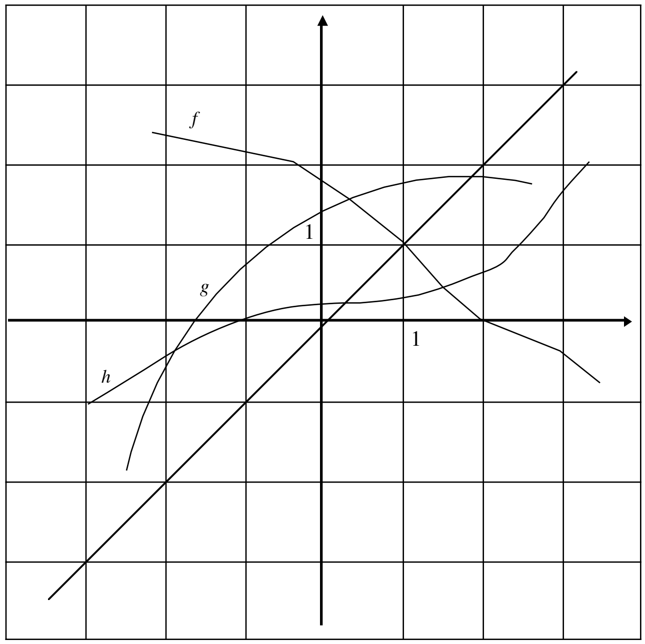
Actividad (5 minutos, pupitre y pizarra)
Hacer la curva cociente.

Comentario
Después de unos cuatro minutos el profesor debería hacer el ejercicio en la pizarra : con el objeto de mostrar claramente los pasos que ayudan a hacer el ejercicio : poner la rejilla, transformar cada parte de la curva, etc. La rejilla es parte del conocimiento global del tema.

FASE FINAL

ESCENA 11

Pizarra



Libro : 2-9

Actividad (El resto de la clase, pizarra y pupitre)

Tratar de contestar al máximo número de preguntas del ejercicio.

Comentario

El profesor debería explicar cómo, utilizando el camino correspondiente, se obtiene un aproximado del valor numérico de $f(g(1))$. (Se hace el camino que tiene ese nombre y se mira a qué altura queda el punto final del camino : ese es el valor numérico buscado. En el caso de este ejemplo da aproximadamente 0.2).

En todos los casos hay que comenzar por el eje x.

Siempre que se llega a una curva, donde hay una esquina, se puede ir a la siguiente directamente o vía la bisectriz. En el primer caso el "exponente" de la curva a la que llega el segmento será diferente de la de donde sale el segmento. En el segundo caso será el mismo. Esto es casi una receta. Se puede estudiar ese fenómeno con ejemplos. Pero no conviene darlo como receta. Es mejor que se haga el tanteo y que luego el alumno verifique si el camino que hizo corresponde realmente al nombre que le interesa. Gradualmente la receta debería aparecer como un descubrimiento del alumno que es útil para evitar el tanteo.

Pedirles a los estudiantes que traigan la calculadora la próxima clase. No tiene porqué ser propia porque no se va a utilizar todo el semestre.

CLASE 6

VISION GLOBAL

El Capítulo 3 de MG fué diseñado con el objeto de enfrentar el hecho de que muchos de los estudiantes que ingresan a la universidad, entienden deficientemente la estructura de las fórmulas y tienen poca idea de la diferencia entre fórmula y ecuación.

En el capítulo se hace uso de extensivo de la noción de diagrama. Este objeto es clave para replantear parte del saber que debería tener el alumno, en un lenguaje nuevo para él. El diagrama, que no es un objeto que está presente en los textos elementales de cálculo, ha resultado ser muy útil para el manejo de las nociones relacionadas con función, fórmula, ecuación, solución de ecuación, etc.

En esta clase se debería cubrir la materia contenida en las diez primeras páginas. Esto, aparte de introducir los diagramas, abarca el estudio de la estructura de las fórmulas, la noción de tecla inversa (relacionada con la inversa funcional). El uso de las inversas en la resolución de ecuaciones y finalmente la conexión de los diagramas con el lenguaje algebraico habitual que se utiliza para plantear ecuaciones.

FASE INICIAL

ESCENA 1

Pizarra

Dudas

Libro : Capítulo 2

Actividad (minutos, pizarra, pupitre o consulta individual)

Dudas del Cap. 2. Algún ejercicio sobre la página 2-9

Comentario

FASE MEDIA

ESCENA 2

Pizarra

Libro : 3-1

Actividad (4 minutos, pupitre)

Ponga su calculadora en radianes.

Efectúe con una calculadora las operaciones:

I) Marque el número 2.

II) Presione la tecla que corresponde al seno.

III) Presione la tecla que corresponde a la exponencial.

El número que aparece en la pantalla es

Comentario

Algunas personas no saben cómo poner la calculadora en radianes. Es recomendable preguntar si todos lo saben. En caso contrario hay que indicar que hay que presionar la tecla mode y luego la del número 5 (si se trata de una Casio corriente). En algunos modelos es el 2. Y en algunas marcas es diferente. Es bueno preguntar al ir terminando la actividad si les dió el número

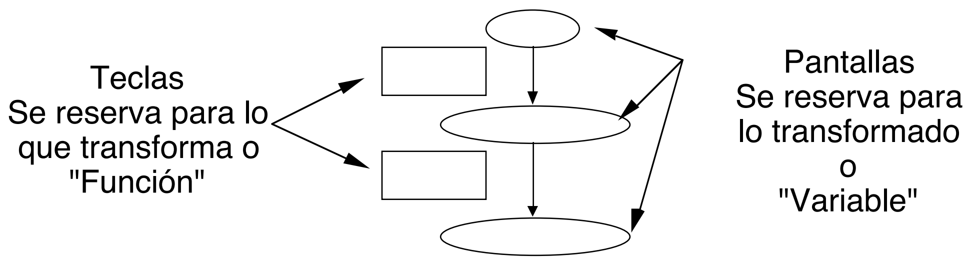
2.482577728. Los que la hacen antes de cuatro minutos deberían avanzar en la lectura de la página.

ESCENA 3

Pizarra

CONVENCION IMPORTANTE.

En los rectángulos van los nombres de las teclas pero sin x.



Libro : 3-2

Actividad (2 minutos, pizarra)

Se trata de comentar lo que está en la página 3-2. E ilustrar con un ejemplo lo que significa la convención.

Comentario

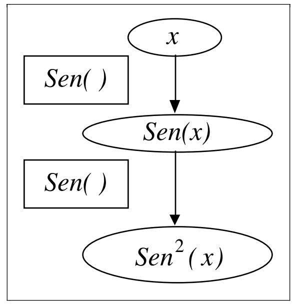
La convención es muy importante porque obliga, en el caso de fórmulas que utilizan operaciones binarias (que no pueden ser reducidas a funciones de una variable), a definir diagramas ramificados. Esto se verá en la segunda clase del capítulo.

Por otro lado es conveniente señalar que el diagrama es una manera de "ver" los procesos de fabricación, como una sucesión de pasos transformadores. Esta manera es probablemente moderna, en la antigüedad no existía. El concepto de función subyace a la noción de proceso de fabricación.

Se ha puesto comilla en la palabra función y variable porque son nociones que a estas alturas no conviene tratar de manera rigurosa.

ESCENA 4

Pizarra



Libro : 3-3

Actividad (3 minutos, pupitre)

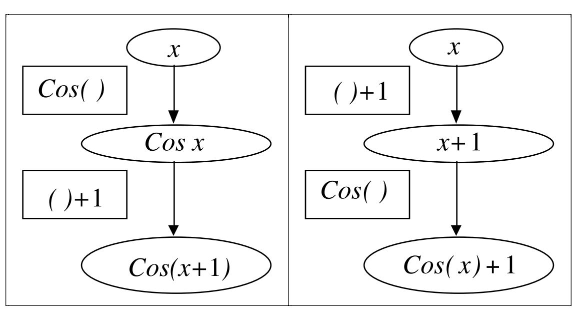
Se trata de que corrijan el error. Al final se debería preguntar si todos vieron el error. (O circulando entre los pupitres ver si lo vieron)

Comentario

Este error es muy frecuente porque la concepción que interpreta a $Sen(x)$ como "seno por x" está muy extendida. Esta concepción lleva de manera natural a que $Sen(Sen(x))$ es $Sen^2(x)$. Este tipo de errores son difíciles de erradicar. A lo largo del texto existen varias ocasiones donde el alumno debe enfrentarlo. Este error es el causante que un porcentaje no despreciable de alumnos al derivar una función compuesta apliquen la regla de derivada de un producto en vez de la regla de la cadena.

ESCENA 5

Pizarra



Libro : 3-3

Actividad (3 minutos, pupitre)

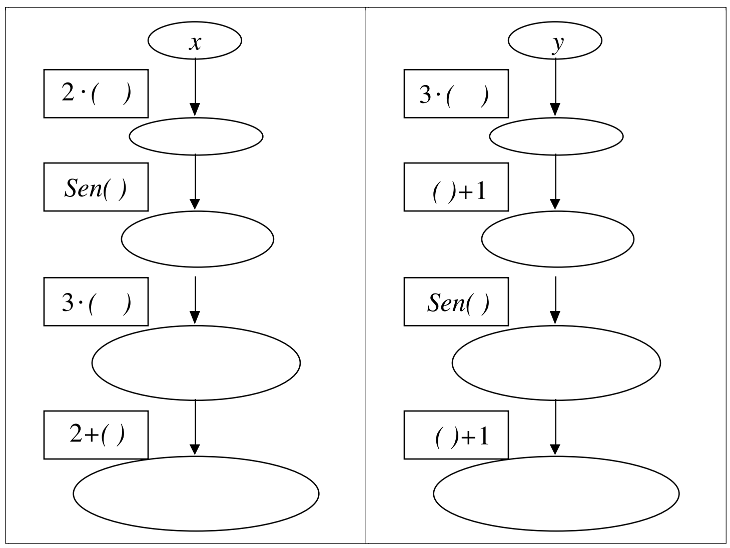
Detectar y corregir el error en cada caso.

Comentario

Comentar la importancia del orden y el uso de los paréntesis para diferenciar entre diversos órdenes.

ESCENA 6

Pizarra



Libro : 3-4

Actividad (4 minutos, pupitre)

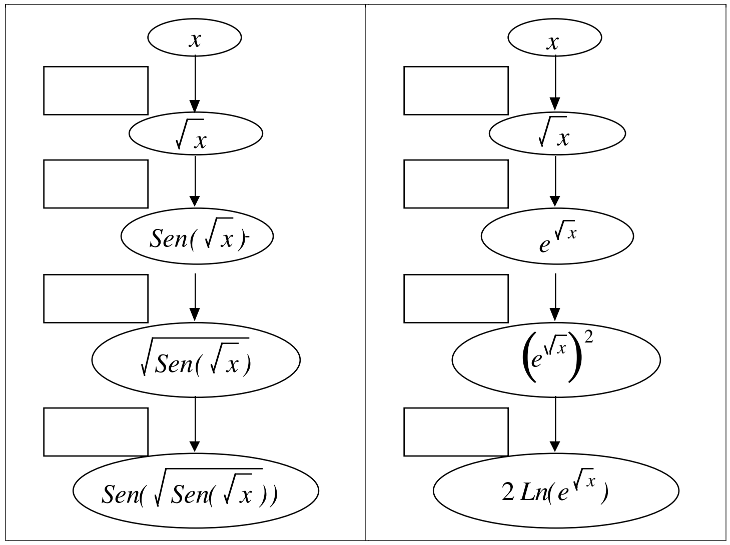
Completar las pantallas.

Comentario

Esta actividad tiene por finalidad ir introduciendo al alumno en el uso del diagrama. Deberían haber pocas dificultades. Como siempre, los que lo hagan antes de tiempo se les sugiere seguir completando la página.

ESCENA 7

Pizarra



Libro : 3-5

Actividad (4 minutos, pupitre)

Completar de manera coherente los diagramas.

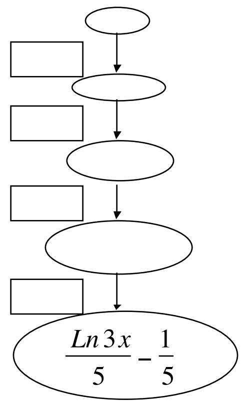
Comentario

Es una continuación natural de la escena anterior. Pero es muy diferente : implica un comienzo de lectura de las fórmulas y una comparación entre ellas.

En la siguiente página hay ejercicios que suelen causar dificultades porque implícitamente se aplican algunas de las propiedades de las exponenciación y de los logaritmos. Las preguntas referentes a esa página pueden ser tratadas en la práctica.

ESCENA 8

Pizarra



Libro : 3-6

Actividad (3 minutos, pupitre)

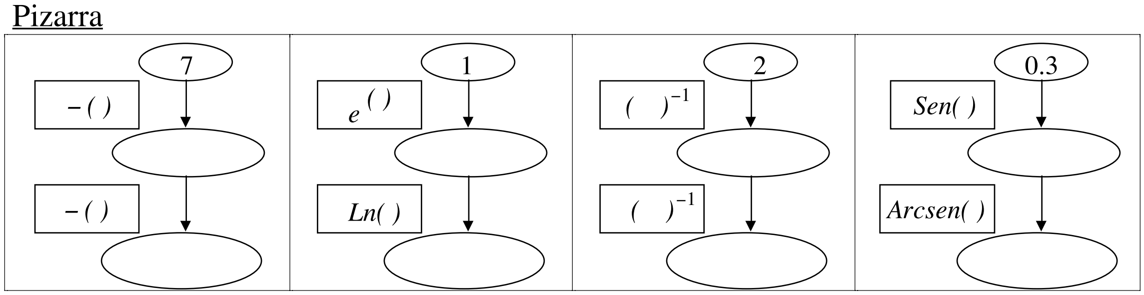
Comentario

Con esta actividad se inicia el uso del diagrama para la comprensión de la estructura de una fórmula. Hay alumnos que completan de arriba hacia abajo y otros de abajo hacia arriba. Ambas maneras son correctas.

La comprensión de la estructura de la fórmula es esencial para numerosos procesos. En particular la resolución de ecuaciones, la graficación de funciones compuestas, la aplicación de las reglas de derivación de fórmulas, etc.

ESCENA 9

Pizarra



Libro : 3-7

Actividad (5 minutos, pupitre)

Completar en las pantallas.

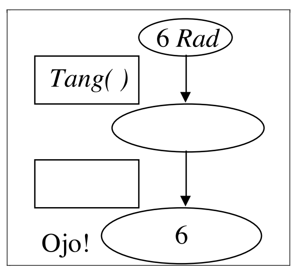
Comentario

Con esta actividad se inicia el estudio de la inversa. La inversa se refiere a la inversa de una tecla (no hace falta hablar de función inversa). La propiedad (que los alumnos rápidamente descubren) es que en la pantalla final da el mismo número que el que había en la pantalla de arriba del diagrama.

Además, a nivel de la calculadora aprenden cómo teclear la inversa. A veces hay problemas de notación: en la calculadora la tecla $-(\quad)$ es denotada por $^+\!/\!_-$. Igualmente la tecla $(\quad)^{-1}$ suele ser denotada por $1/x$. Esto causa cierta confusión en algunos alumnos y hay que estar preparados para aclarar esos detalles.
La actividad tiene la ventaja de familiarizar un poco más a los alumnos con la calculadora y seguir profundizando en la conexión entre la notación de MG, los libros de matemática y la calculadora.

ESCENA 10

Pizarra



Libro : 3-7

Actividad (3 minutos, pupitre y pizarra)

Completar utilizando la calculadora (para poner los valores numéricos).

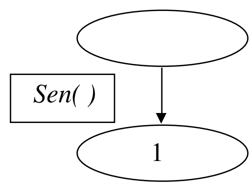
Comentario

Esta actividad debe ser hecha con la calculadora, porque es ella la que va a poner en evidencia un hecho : al aplicar la inversa de la tangente el resultado de la pantalla de abajo no va a ser seis sino un número negativo. La intención no es la de explicar ese fenómeno. A estas alturas esto exigiría la introducción de una serie de términos o bien del gráfico de la tangente. Esto hace que la posible explicación no sea bien comprendida. La página 5-23 explica el fenómeno. Cuando se está en el capítulo 5 ya se han cubierto los conceptos necesarios para entender adecuadamente el fenómeno. Por ello conviene dejar el fenómeno como una pregunta abierta y decirle a los estudiantes que se estudiará en el capítulo 5.

Un fenómeno de la misma naturaleza, en esa página, es el del cuadrado con la raíz cuadrada. Este ejercicio debe ser pensado como un elemento para establecer una distancia entre la calculadora y el mundo de las matemáticas. La calculadora no es la matemática. Es un objeto físico muy especial. Haciendola funcionar se puede "imitar" ciertos objetos matemáticos. Pero la imitación no es perfecta.

ESCENA 11

<u>Pizarra</u>



<u>Libro : 3-8</u>

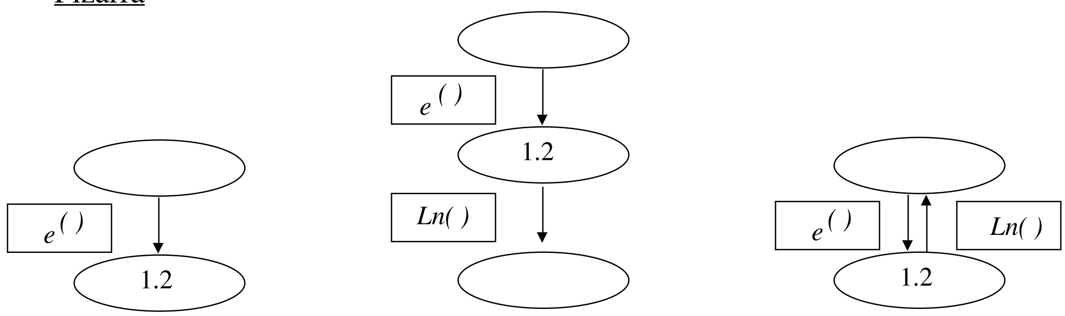
<u>Actividad (3 minutos, pizarra)</u>
Completar la primera pantalla.

<u>Comentario</u>
Esta actividad es fundamental porque inicia el estudio de las ecuaciones desde el lenguaje de los diagramas. A veces hay alumnos que dan la solución del ejercicio porque 1 es un valor muy particular. Esto ayuda a entender cuál es problema del llenado de abajo hacia arriba : hay que descubrir un número que al aplicarle la tecla del seno dé 1.

Pero después que esto está claro, conviene para que vean la dificultad del problema en general. Para ello basta con substituir el uno por un número que no corresponda a un ángulo notable : por ejemplo 0.37. Con ese número la única salida (en ese momento) es la calculadora y el tanteo. Conviene pedirles a los alumnos posibles números para la pantalla vacía. La probabilidad de que el tanteo lleve a la solución es muy pequeña. Esta actividad tiene por objeto darle sentido al uso de la inversa. La inversa es la que resuelve la situación de manera económica y segura. La escena que sigue muestra cómo.

ESCENA 12

Pizarra



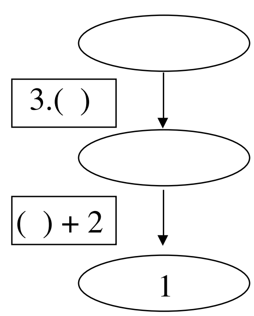
Libro : 3-9

Actividad (5 minutos, pizarra)

Mostrar la relación entre los tres diagramas, para ver que al ir hacia abajo aplicando la inversa se llega al número que estaba al comienzo y por lo tanto la inversa permite remontarse en el diagrama (cosa que se explicita en el tercer diagrama de la figura).

Comentario

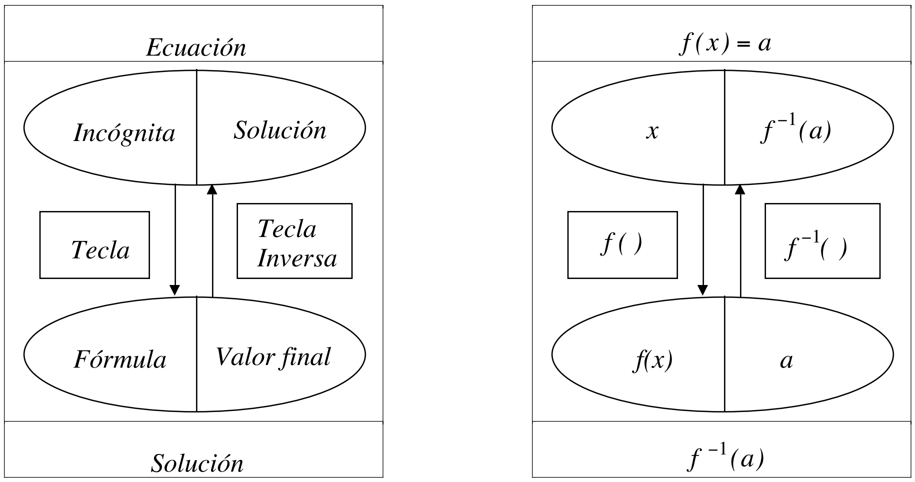
Esta actividad tiene por objeto mostrar la utilidad de la tecla inversa para completar un diagrama de abajo hacia arriba. Después se puede hacer otro ejemplo con



Con este ejemplo la noción de la inversa es intuitivamente más fácil de ver (casi todos entienden que lo contrario de sumar a un número 2 es restarle 2 o sumarle -2, etc).

ESCENA 13

Pizarra



Libro : 3-10

Actividad (5 minutos, pizarra)

Esta actividad tiene por objeto acompañar al estudiante en la lectura de la página. Es conveniente enfatizar que en ambas "formas" se está hablando de lo mismo. En la de la izquierda se hace en lenguaje "castellano" y en la de la derecha, en lenguaje "simbólico".
Ese trabajo con las formas y los dos lenguajes es una manera cómoda de establecer definiciones : de lo que es ecuación, solución de una ecuación, etc.

Se puede hacer notar que el lenguaje simbólico es más preciso que el natural: por ejemplo con él se puede ver cuál es la relación de lo que se llama solución con la ecuación. En general, en el lenguaje simbólico, se pueden ver más claramente las relaciones entre las diferentes palabras: ecuación, solución, incógnita, tecla, etc.

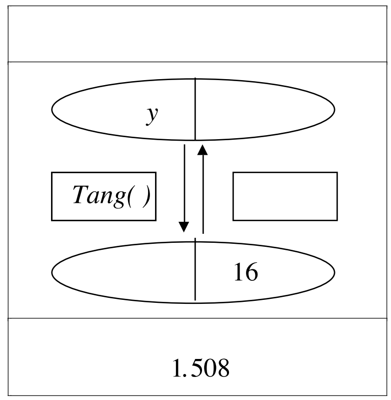
Comentario

El objetivo de la página es establecer el puente entre la actividad "rellenar el diagrama de abajo para arriba", con la actividad habitual de resolución de ecuaciones. Esta conexión será reforzada en las páginas que siguen. Es necesaria para darle elementos al estudiante que faciliten la autocorrección de deficiencias a nivel del despeje.

FASE FINAL

ESCENA 14

Pizarra



Libro : 3-10

Actividad (5 minutos, pupitre)

Completar de manera coherente la forma.

Comentario

Esta actividad tiene por objeto asegurar la comprensión de lo expuesto en la escena anterior por el profesor.

Algunos alumnos hacen toda la página en cinco minutos.

CLASE 7

VISION GLOBAL

En esta clase se debería cubrir el resto del Capítulo 3. Esto incluye :

Extensión del uso del diagrama para resolver ecuaciones (3-11)
Estudio de la relación entre diagrama y despeje (de 3-12 a 3-16)
Dominio y rango de una tecla (3-18 y 19)
Diagramas ramificados (3-20)

FASE INICIAL

ESCENA 1

Pizarra

Dudas

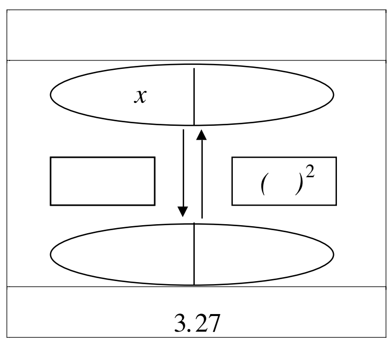
Libro : 3-1 a 3-10

Actividad (15 minutos, pupitre, pizarra y consulta individual)

Comentario

ESCENA 2

Pizarra



Libro : 3-10

Actividad (3 minutos, pupitre o consulta individual)

Hacer el ejercicio

Comentario

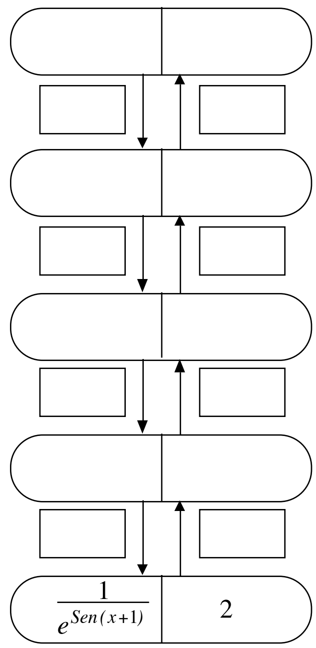
Esta escena se hace para recordar la parte final de la clase anterior y así introducir la generalización de esta actividad que se hace en la escena que sigue.

FASE MEDIA

ESCENA 3

Pizarra

$$\frac{1}{e^{Sen(x+1)}} = 2$$



Libro : 3-11

Actividad (4 minutos, pizarra)

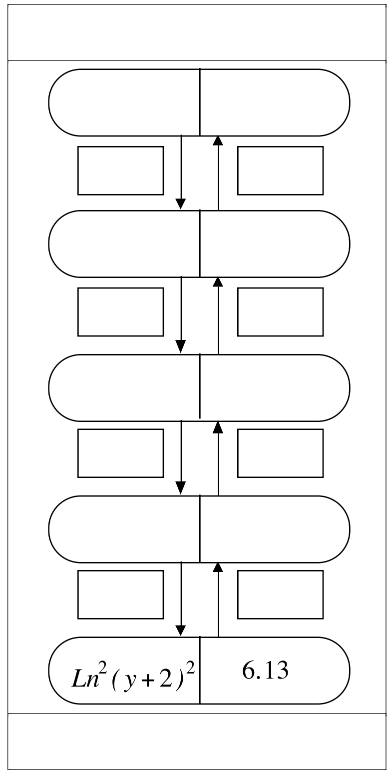
Se trata de mostrar cómo se hace el ejercicio. Conectar con los ejercicios anteriores y con la noción de inversa.

Insistir sobre la verificación de que el número obtenido yendo de abajo hacia arriba es realmente la solución. (Hacer la verificación).

Comentario

ESCENA 4

Pizarra



Libro : 3-11

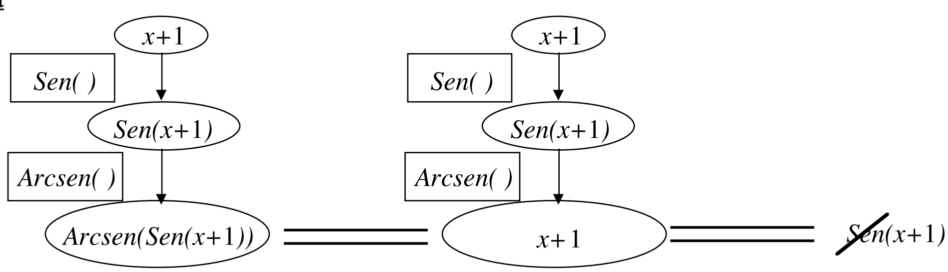
Actividad (5 minutos, pupitre)

Hacer el ejercicio

Comentario

ESCENA 5

Pizarra



Libro : 3-13

Actividad (3 minutos, pizarra)

Explicación.

Comentario

Se trata de hacer ver que la aplicación en sucesión, de una tecla y "su inversa" a una fórmula la deja intacta. Esto permite definir una especie de regla de cancelación. Y es esta regla la que está funcionando en la resolución de ecuaciones.

ESCENA 6

Pizarra

Ecuación	$3x + 2 = 1$
Tecla alejada	
Inversa de la tecla alejada	
Aplicación de la inversa	
Simplificación	
Ecuación	
Tecla alejada	
Inversa de la tecla alejada	
Aplicación de la inversa	
Simplificación	

Libro : 3-14

Actividad (5 minutos, pizarra)

Note que en la pizarra aparece solamente el ejemplo sin completar, en cambio en el libro aparece completado. Por ello la actividad de la pizarra en este caso consiste en hacer ver cómo se llenó el ejemplo del libro.

Hay que explicar qué se entiende por la tecla más alejada. Se trata de la tecla más alejada de la x del comienzo y por lo tanto la que está más alejada es la que está más abajo en el diagrama, la que se ha aplicado de último. Se puede poner en la pizarra el diagrama que corresponde a $3x + 2$. (No el que corresponde a $3x + 2 = 1$). Y allí se puede mostrar la última tecla.

La tecla inversa se debe aplicar a ambos lados de la igualdad. Explicar esto con claridad.

Señalar la doble raya : se tiene después una ecuación más sencilla..Y su diagrama tiene una sola tecla : en ese caso la más alejada es también la más cercana.

Comentario

La finalidad de la actividad es alejarse gradualmente del diagrama e incrementar la capacidad de lectura de las expresiones. Esta actividad es fundamental para cuando lleguen a la aplicación de las reglas de derivación. También es importante para que autocorrijan algunas de sus deficiencias en el despeje.

ESCENA 7

Pizarra

Ecuación	$Sen(x-2)=0.3$
Tecla alejada	
Inversa de la tecla alejada	
Aplicación de la inversa	
Simplificación	
Ecuación	
Tecla alejada	
Inversa de la tecla alejada	
Aplicación de la inversa	
Simplificación	

Libro : 3-14

Actividad (5 minutos, pupitre)

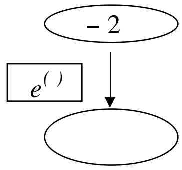
Hacer el ejercicio.

Comentario

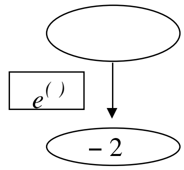
Esto es una actividad de fijación de ideas de la anterior. Conviene exigir que den una respuesta numérica y no del tipo: $Arc\ Sen(0.3)+2$.

ESCENA 8

Pizarra



y



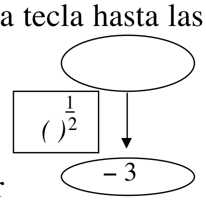
Libro : 3-18.

Actividad (10 minutos, pizarra y pupitre)

El objetivo de esta página es el de introducir las nociones de dominio y rango de una tecla. Deberían hacerse varios ejercicios de la serie y completar algunas filas de las tablas.

Comentario

La idea de dominio de una tecla es relativamente clara. La de rango es más complicada porque la calculadora no distingue lo que es una inversa a la derecha de una inversa a la izquierda: por ejemplo $(\ \ )^2 \circ \sqrt{\ \ } = (\ )\Big|_{Dom\sqrt{\ \ }}$, pero $\sqrt{\ \ } \circ (\ \ )^2 \neq (\ )\Big|_{Dom(\ \ )^2}$. Por ello se podría decir que $x \in Rango(T) \Leftrightarrow T\left(T^{-1}(x)\right) = x$. Esta definición es bastante complicada y por lo tanto se sugiere no llevar (con los alumnos) el concepto de rango de una tecla hasta las últimas consecuencias. La definición que se ha dado se puede usar para analizar



y ver que como $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$, el número -3 no pertenece al rango de $\sqrt{\ \ }$.

Otra manera de ver ese resultado es aplicando la $\sqrt{\ \ }$ a bastantes números y viendo que nunca los resultados son negativos (pero para que esa idea tenga sentido hay que también explicar el concepto de rango de una tecla, diciendo que es el conjunto de números que pueden resultar de aplicar la tecla a los números de su dominio).

Una idea que debería quedar clara a los alumnos es que al aplicar una tecla no siempre se obtiene un número. Y descubrir para cada tecla dónde se obtienen (al aplicarlas) números y dónde no.

La otra idea es que no siempre al aplicar la inversa (a un número situado en la última pantalla) y luego la tecla se obtiene el mismo número. **Si no se obtiene el mismo número el número de partida no estaba en el rango de la tecla**.

ESCENA 9

Pizarra

Haga el diagrama de $x^2 \cdot e^x$, y recuerde que en las teclas no puede poner la x.

Libro : (No especificar ninguna página).

Actividad (5 minutos, pupitre y pizarra)

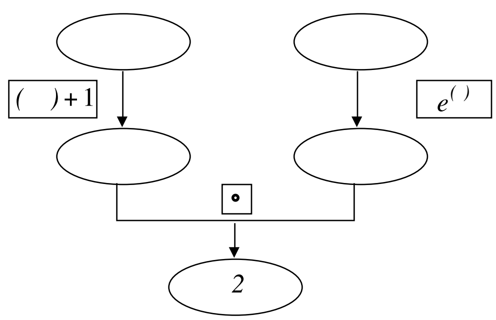
Después de dar un tiempo para que hagan el diagrama, puede plantear las pregunta del comienzo de la página 3-20 para dar alguna pista. Al final, el diagrama pedido debería hacerse en la pizarra y comentar que se trata de un nuevo tipo de diagrama que se llamará ramificado.

Comentario

La intención de esta actividad es hacerlos chocar con el hecho de que si se mantiene la convención de que en los rectángulos del diagrama no pueden ir expresiones que contengan la variable x, entonces el diagrama de la fórmula no es del tipo de los estudiados hasta ese momento.

ESCENA 10

Pizarra



Libro : 3-20

Actividad (3 minutos, pizarra)

Al tratar de completar el diagrama hay que solicitar a los alumnos, los números posibles para remontarlo (tiene que ser por tanteo con la condición de que el producto dé 2 y además que al seguir subiendo los números que dan en las dos elipses de arriba son iguales). Esto rápidamente se ve que es muy difícil lograrlo.

Se puede intentar la solución de la ecuación planteada ($(x+1)e^x = 2$) utilizando el clásico despeje. Aquí se ve que el despeje no funciona.

Comentario

Las ecuaciones del tipo $(x+1)e^x = 2$ se llamaban ecuaciones trascendentes.

El medio para dar la respuesta de "manera natural" a esta pregunta aparece en inecuaciones. Por ello no vale la pena contestarla en este momento. La finalidad de plantearla a este nivel es hacer ver al alumno que las ecuaciones que involucran diagramas ramificados son mucho más difíciles de resolver que las otras. Por otro lado, cuando se llegue a inecuaciones, estas ecuaciones plantean la necesidad de introducir métodos de obtención de la solución por aproximación. Y permitirán ampliar la concepción que tiene el alumno de lo que es la solución de una ecuación.

ESCENA 11

Pizarra

Hacer el diagrama de $2x^2 - 3x - 4$

Libro : la actividad no figura en MG.

Actividad (3 minutos, pupitre o pizarra)

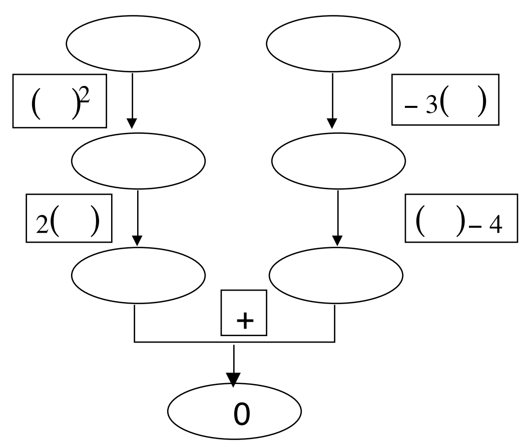
Dar un tiempito para que ellos hagan el diagrama.

Comentario

La idea de hacer esta actividad es la de preparar la actividad que sigue.

ESCENA 12

Pizarra



Libro : la actividad no figura en MG.

Actividad (3 minutos, pizarra)

Preguntar a los alumnos cuál es la ecuación que se está resolviendo al completar ese diagrama (en caso de duda haga notar que se trata del diagrama de la fórmula $2x^2 - 3x - 4$)

Pedir que traten de completarlo. Se trata de hacer ver que, nuevamente y por ser ramificado, se debe tantear para lograr completarlo de manera coherente.

Comentario

Esta actividad es realizada para realzar la que viene.

FASE FINAL

ESCENA 13

Pizarra

Hacer los diagramas de $ax^2 + bx + c$ y de $a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$.

Libro : la actividad no figura en MG.

Actividad (3 minutos , pizarra)

Comentario

ESCENA 14

Pizarra

Resolver las ecuaciones $ax^2 + bx + c = 0$ y $a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$

Libro : la actividad no figura en MG.

Actividad (3 minutos, pizarra)

Esta actividad está diseñada para constatar que la primera ecuación no es resoluble en términos de diagramas y para llegar, con la segunda, al resultado conocido por los alumnos de que la solución viene dada por: $x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Comentario

ESCENA 15

Pizarra

Desarrollar $a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$ para llegar a $ax^2 + bx + c$

Libro : la actividad no figura en MG.

Actividad (3 minutos , pizarra)

Señalar que al ser las dos fórmulas $a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$ y ax^2+bx+c equivalentes, las soluciones de las dos ecuaciones $ax^2+bx+c=0$ y $a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}=0$ son las mismas.

La ventaja $a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$ sobre ax^2+bx+c es que su diagrama es no ramificado.

Comentario

Las actividades de la fase final están encaminadas a mostrar que en el caso de las ecuaciones de segundo grado es posible despejar sólo porque hay una fórmula equivalente que tiene un diagrama no-ramificado. Esta expresión equivalente se obtiene "completando cuadrados". Esto es una de las razones por las cuales la completación de cuadrados es importante.

CLASE 8

VISION GLOBAL

El Capítulo 4 de MG utiliza y combina lo estudiado en los capítulos anteriores para comenzar a graficar fórmulas.

En esta primera clase del capítulo se debe:

Dar la idea de paso de fórmula a curva en el plano cartesiano (método punto a punto).
Hacer algunas de las curvas de las teclas elementales.
Comenzar a utilizar esas curvas para la construcción de gráficas de fórmulas.

FASE INICIAL

ESCENA 1

Pizarra

Dudas.

Libro : 4-1

Actividad (10 minutos, pizarra, pupitre o consulta individual)

Comentario

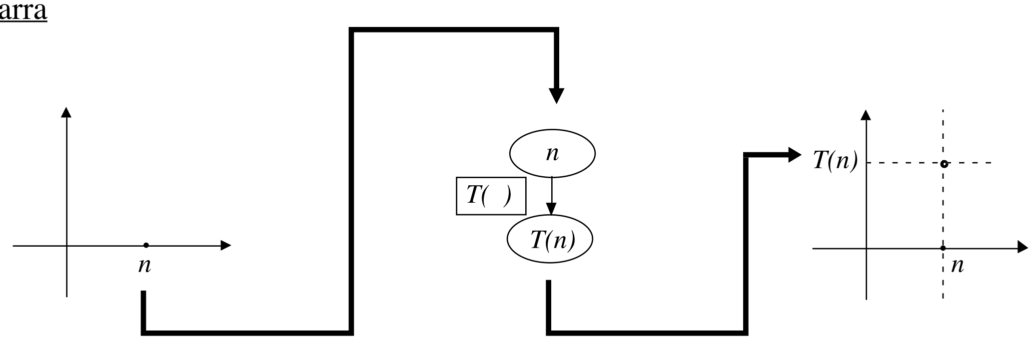
Conviene para iniciar la Fase Media hacer algunas preguntas que ayuden al alumno a situar el capítulo.

¿Cuál es el título del Capítulo 4? ¿Porqué ese título? ¿Cuáles eran los títulos de los capítulos anteriores?, etc.

FASE MEDIA

ESCENA 2

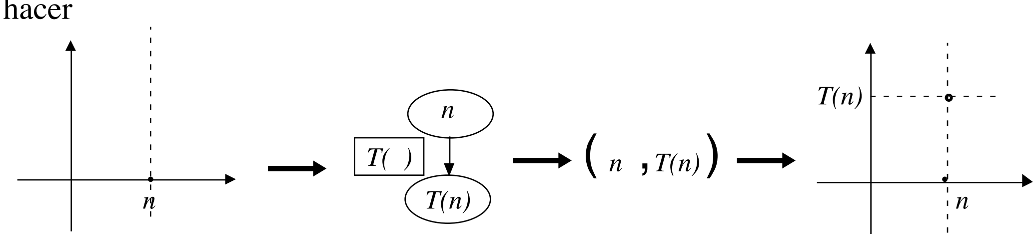
Pizarra



Libro : 4-1

Actividad (3 minutos, pizarra)

Se trata de motivar la conexión tecla-curva. Se puede explicar un poco la figura. Referencias históricas a Descartes son bienvenidas. Se puede también hacer ver que en vez de esa figura se podría hacer



Comentario

La idea de representar un par ordenado por un punto del plano es fundamental para dar una base gráfica al cálculo. Esta idea asegura la existencia de una representación gráfica de cualquier fórmula en una variable.

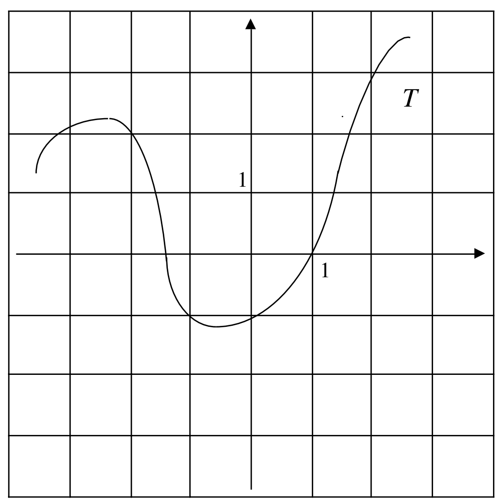
Sin embargo, esta manera que llamaremos punto a punto, será utilizada solamente para hacer las gráficas de las teclas básicas.

MG plantea el estudio de la representación gráfica y de su construcción mediante el uso de otros mecanismos. Estas otras maneras son las que favorecen el uso del gráfico como símbolo o signo, es decir como forma a la cual se le asigna significado. Esta posibilidad es la que hace realmente útiles las representaciones cuando se trabaja en materias donde se hacen modelos matemáticos. Ver tesis citada. [1].

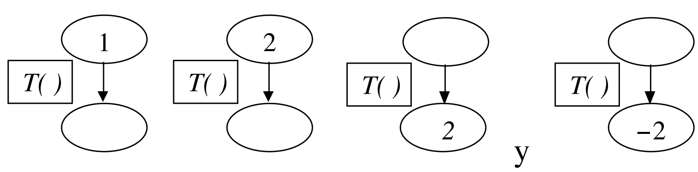
ESCENA 3

Pizarra

De acuerdo a



complete



Libro : 4-2

Actividad (4 minutos, pupitre)

Completar los diagramas mirando la gráfica.

Comentario

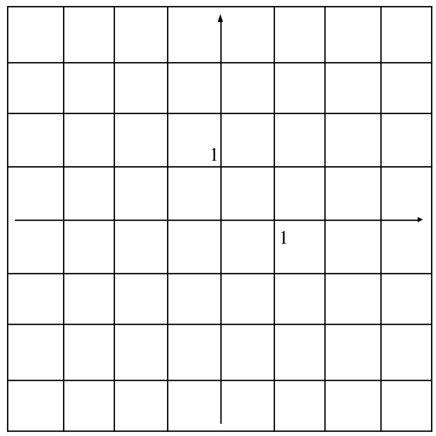
En caso de escasez de tiempo puede saltarse esta actividad. Algunos alumnos al ver la $T(\ )$ han pensado que se trataba de tangente.

Este ejercicio es útil para que los alumnos fijen el paso del mundo de las fórmulas al mundo de las curvas. Y establezcan la relación no sólo de pares ordenados con puntos del plano sino también de diagramas completados con puntos del plano.

ESCENA 4

Pizarra

(x, x)
$(1,1)$
$(2, \quad)$
$(3, \quad)$
$(0, \quad)$
$(-1, \quad)$
$(-2, \quad)$
$(-3, \quad)$



Despues de completar los pares ordenados sitúe sus correspondientes puntos en el plano cartesiano.

Libro : 4-3.

Actividad (3 minutos, pizarra y pupitre)

Se trata de indicar en la pizarra cómo hacer algunos pares y graficarlos. Dejar el resto a los alumnos. Y luego indicar que hay que unir los puntos que se graficaron.

Comentario

La intención de esta actividad es la de mostrar cómo hay que hacer hasta la página 4-18. Es el comienzo de la construcción del **alfabeto gráfico**. Varias de las escenas que siguen tienen que ver con ello. Pero no se pueden hacer todas las curvas de las teclas elementales en clase. Hay que mandar a hacer algunas para la casa.

Las que se hacen en esta clase tienen por finalidad permitir comenzar a aplicar, en esta misma clase, las ideas fundamentales del capítulo 2 para la construcción de gráficas aproximadas de fórmulas.

La página 4-3 tiene además otras actividades. Por ahora es mejor concentrarse en hacer las curvas : es decir los pares ordenados, los puntos del plano y el trazado uniendo esos puntos. La actividad de estudiar las propiedades de la curva es mejor decirles que la hagan en la casa.

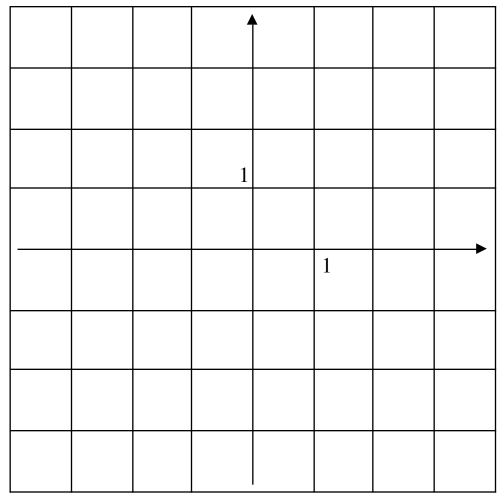
Por otro lado la actividad de las diferentes notaciones es mejor abordarla después de haber hecho dos o tres curvas. Algunos alumnos preguntan, de manera espontánea cómo se debe hacer.

ESCENA 5

Pizarra

Complete:

$(x, -x)$
$(1, -1)$
$(2, \quad)$
$(3, \quad)$
$(0, \quad)$
$(-1, \quad)$
$(-2, \quad)$
$(-3, \quad)$



Despues de completar los pares ordenados sitúe sus correspondientes puntos en el plano cartesiano.

Libro : 4-4

Actividad (4 minutos, pupitre)

Comentario

El estudio de la curva es mejor dejarlo para la casa.

ESCENA 6

Pizarra

Complete:

Tecla	$-(\quad)$
Notación funcional	$f(x) =$
Ecuación en dos variables	$y =$
Por pares ordenados	$(x, \quad)$

Libro : 4-4

Actividad (3 minutos, pizarra)

Se trata de explicar las diversas maneras de referirse a la curva que se ve.

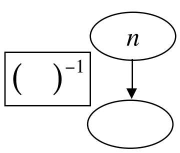
Comentario

Esto se hace para facilitar a los alumnos la lectura de otros libros. Preferimos la notación $-(\ )$, porque es la más correcta y flexible para los fines del curso. La notación $f(x) = -x$, concuerda con lo que se está haciendo ($f(\ ) = -(\ )$) y con la costumbre de llenar los espacios vacíos con una letra que llaman variable. La notación $y = x$ se refiere a otro mundo (curvas de nivel de altura cero). Lamentablemente en los libros usan esta notación libremente, sin aparentemente no tener conciencia de las complicaciones que acarrea al estudiante ni de que, de hecho, involucra una interpretación algebraica diferente. Finalmente la notación de pares ordenados es útil para dar consistencia al tema y para fines futuros.

ESCENA 7

Pizarra

Complete:



Tecla	$(\ )^{-1}$
Notación funcional	$f(x) = \frac{1}{x}$
Ecuación en dos variables	
Por pares ordenados	

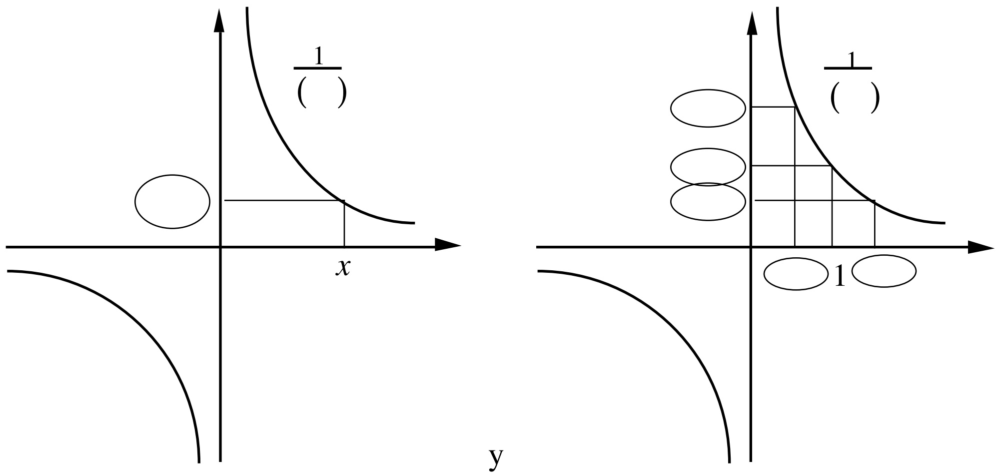
Libro : 4-5

Actividad (8 minutos, pupitre)

Completar aparte del recuadro que está en la pizarra, los pares ordenados y la curva que piden en la página 4-5.

Comentario

Esta actividad es un poco más larga porque los puntos que hay que situar deben calcularse con la calculadora. Además de ello están las preguntas de después de la gráfica, que no son fáciles de entender para los estudiantes. La mayoría de ellos no se les ocurre mirar el gráfico para contestar las preguntas : no saben mirar el gráfico para ello. Pareciera que una de las dificultades está en que ya no se habla de $f(x)$ sino de $\frac{1}{x}$. De todas maneras hay que darles un tiempo para que vayan descubriendo ese tipo de hechos. Se les puede ayudar (después que la curva está hecha) diciendo que completen (los dibujos que siguen debería hacerlos el profesor en la pizarra) :

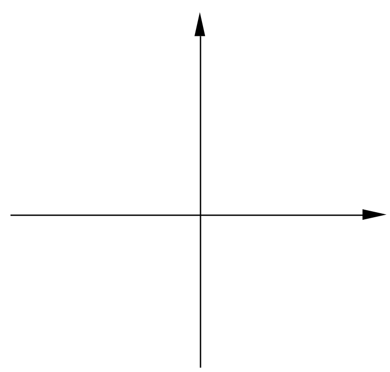


El estudio de la curva es mejor dejarlo para la casa.

ESCENA 8

Pizarra

$(x, \quad)$
$(0.5, \quad)$
$(0.25, \quad)$
$(1, \quad)$
$(1.5, \quad)$
$(2, \quad)$
$(3, \quad)$
$(0, \quad)$
$(-0.5, \quad)$
$(-0.25, \quad)$
$(-1, \quad)$
$(-1.5, \quad)$
$(-2, \quad)$
$(-3, \quad)$



Libro : 4-6

Actividad (2 minutos, pizarra)

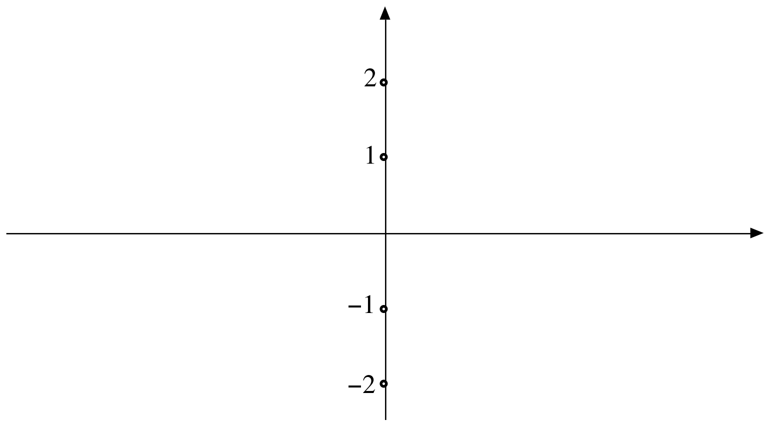
Hacer el gráfico aproximado de la tecla elevar al cuadrado.

Comentario

ESCENA 9

Pizarra

Tecla	2
Notación funcional	
Ecuación en dos variables	
Por pares ordenados	



Libro : 4-16

Actividad (2 minutos, pizarra).

Hacer la gráfica de $f(x) = 2$.

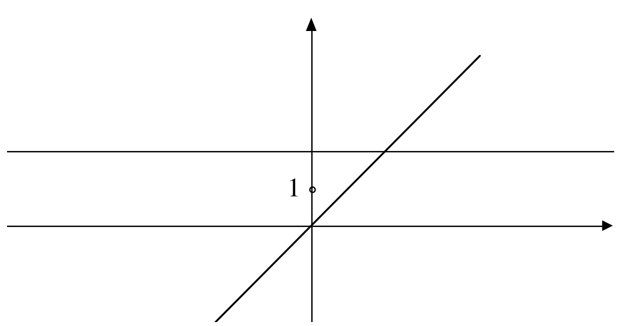
Comentario

Se trata de mostrar que la fórmula que siempre da el mismo número, independientemente del x es una paralela al eje x. Hay que hacer varios puntos para que se vea.

Después de esta actividad conviene comenzar a construir curvas de fórmulas. Para ello las propiedades y operaciones aprendidas en el capítulo 2, son fundamentales. A medida que se vayan utilizando es conveniente recordar esas propiedades.

ESCENA 10

Pizarra



Libro : 4-19

Actividad (3 minutos, pizarra)

Preguntar a los alumnos las preguntas de la página. Por ejemplo cuál nombre poner a la recta paralela al eje x. De acuerdo a lo que se ha estudiado ¿Cuál es el nombre de la bisectriz?.
Conviene utilizar la notación "tecla". Luego se puede recordar la propiedad que se estudió en el Capítulo 2 para la suma de una horizontal con una curva cualquiera: el resultado es una curva de la "misma forma" que la que no es la horizontal pero desplazada de acuerdo a la altura de la horizontal. Aplicar esa propiedad al caso de la figura.
Preguntar por el nombre de la curva suma.

Comentario

Este es el primer ejercicio donde se aplica el alfabeto gráfico y las operaciones gráficas para construir la gráfica de una fórmula.
Otra manera de encararlo es partiendo de la fórmula : $x+2$. Hacer notar que la fórmula es la suma de dos teclas para las cuales se acaban de estudiar sus gráficas (la x y la 2). Pedir que las grafiquen. Y ya que se están sumando, pedir que se sumen las curvas gráficamente (ahí se puede recordar al capítulo 2, páginas 2-10 a 2-14). Esto es una estrategia general.

ESCENA 11

Pizarra

Grafique la curva de la fórmula $2\cdot(\quad)$.

Libro : 4-20

Actividad (4 minutos, pupitre)

Hacer la curva de la fórmula.

Comentario

Es conveniente que los alumnos descubran que deben graficar la de 2 y la de $(\quad)$, para luego aplicar a ellas el producto gráfico estudiado en el Capítulo 2. (Siempre conviene recordar que fue estudiado en el capítulo 2 y para los que se han olvidado recordar las principales propiedades globales que se estudiaron allí, esto con el fín de que se vayan fijando y que se agilice su uso).

ESCENA 13

Pizarra

x^2+1, x^2-1, $-x^2$, $-x^2+1$ y x^2, $2x^2$, $3x^2$, $-3x^2$.

Libro : 4-24 y algunas no figuran en MG.

Actividad (3 minutos, pizarra)

Mostrar rápidamente cómo serían las gráficas de estas curvas.

Comentario

En esta actividad se trata de fijar las ideas de las dos escenas anteriores a esta. Con esto se cubre la parte básica de suma y producto.

Se les puede preguntar cuáles son las otras operaciones gráficas que se estudiaron en el capítulo dos : son el cociente, la compuesta. y la inversa.

ESCENA 14

Pizarra

Grafique $\dfrac{1}{x^2+1}$

Libro : está pero en la página 5-18.

Actividad (3 minutos, pupitre)

Hacer la curva correspondiente.

Comentario

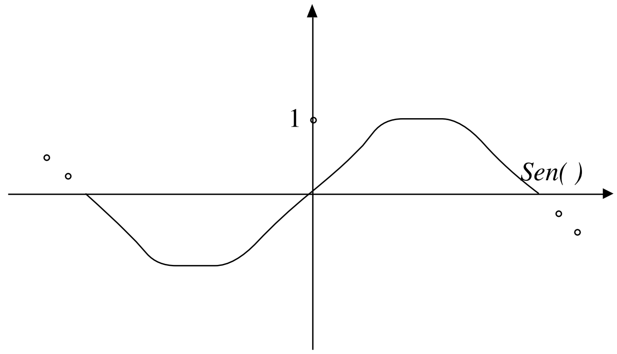
El ejercicio de graficación de esta fórmula está en la Página 5-18 porque en dicha página se estudia un conjunto de funciones racionales. Sin embargo, esta es una actividad natural en este momento : se aprovecha un resultado de la escena anterior y aparece el "cociente gráfico" como instrumento de trabajo.

Los alumnos se hacen ideas a priori sobre el gráfico, que en general son equivocadas. Es muy recomendable dejarlos que hagan ellos mismos la curva.

Este tipo de actividades que se están haciendo son de hecho un repaso del Capítulo 2. En ese sentido lo refuerzan y caen en buen momento.

ESCENA 15

Pizarra



Grafique $1/Sen(x)$.

Libro : 4-22

Actividad (3 minutos, pupitre)

Hacer la curva de la fórmula.

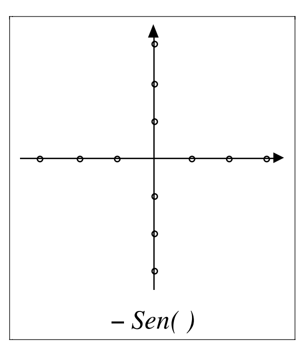
Comentario

En la pizarra se dibuja el gráfico del seno, diciendoles que se trata de un adelanto (y que ellos deben hacer en su casa esa curva, punto a punto, actividad que está en la página 4-7). En este momento el profesor "adelanta" esa curva con el objeto de pulir un poco lo que se ha hecho en cuanto a operaciones y sobre todo con el de introducir la actividad de la fase final.

Hacer ver el parecido entre $1/Sen(x)$ y $1/f(x)$. Y que por lo tanto, se trata de aplicar el cociente de curvas estudiado al final del Capítulo 2. Recordarles que deben poner algunas verticales importantes,etc. ¿Cuáles son los puntos que son importantes debido a sus alturas ? (aparte de los que tienen altura cero). ¿En que se convierten las alturas pequeñas positivas?. ¿Dónde están en la curva las alturas pequeñas positivas? ..etc.

ESCENA 16

Pizarra



Libro : 4-26

Actividad (3 minutos, pupitre)

Hacer la curva de la fórmula.

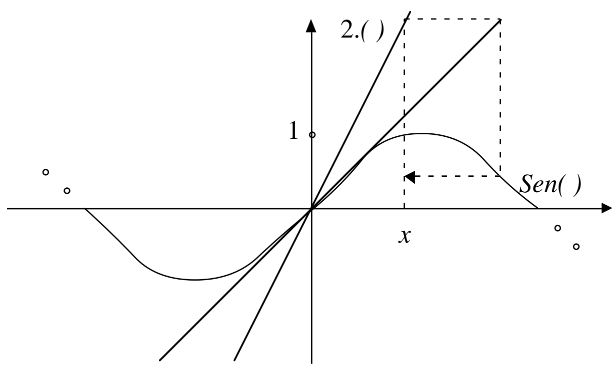
Comentario

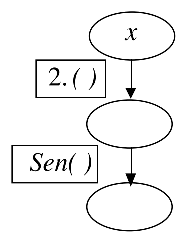
Se les puede sugerir que la fórmula es el producto de dos teclas : es decir que $-Sen(x) = -1 \cdot Sen(x)$.

FASE FINAL

ESCENA 17

Pizarra





Libro : 4-20

Actividad (5 minutos, pupitre y/o pizarra)

Explicar que la operación que se hace con las teclas de un diagrama no ramificado no es ni producto, ni suma, ni cociente, sino lo que se llama "compuesta". Y por ello se utiliza el camino de la compuesta. Es "evidente" que el camino de la compuesta irá primero a la curva de la primera tecla del diagrama. y luego a la segunda y ..etc., Se puede recordar que la recta $2 \cdot (\quad)$ fué hecha al comienzo de la clase, El modelo de camino está en el dibujo.

Pedir que completen la primera figura de 4-21.

Comentario

Pedir que para la **próxima clase hagan el mayor número de páginas de la 4-4 a la 4-18**. Porque las curvas obtenidas en esas páginas serán utilizadas en la próxima clase.

CLASE 9

VISION GLOBAL

En la primera clase del capítulo se han dado los elementos conceptuales del capítulo. Esta clase es de extensión del campo de fórmulas graficables y de consolidación de los conceptos dados en la clase anterior.

Algunos aspectos de la clase pasada que deberían ser ampliados son:

El alfabeto. Por ejemplo hacer la exponencial y el logaritmo. Parte entera. El seno.
El uso del producto : por ejemplo $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x^2$, $e^x . Sen(x)$.
El uso del cociente : por ejemplo $\frac{1}{x^2 - 1}$

Un aspecto nuevo que conviene cubrir es el de la construcción de una inversa :

Por ejemplo se puede tomar el $ArcSen(x)$ y hacerlo punto a punto. Luego hacerlo como la simétrica con respecto a la bisectriz de una parte de la curva seno. Comparar ese resultado con la gráfica (hecha la clase pasada) de $\frac{1}{Sen(x)}$. Es frecuente la confusión entre $ArcSen(x)$ y $\frac{1}{Sen(x)}$.

FASE INICIAL

ESCENA 1

Pizarra

Dudas

Libro : Capítulo 4

Actividad (15 minutos, pizarra, pupitre y consulta individual)

Comentario

Hay que volver a insistir sobre : el punto a punto, cómo utilizar el capítulo 2 para hacer las curvas de las fórmulas.

FASE MEDIA

ESCENA 2

Pizarra

Hacer las curvas de la exponencial y del logaritmo neperiano.

Libro : 4-10 y 4-11

Actividad (5 minutos, pupitre)

Con esta actividad se recomienza el estudio del alfabeto.

Comentario

Al final de la actividad dibujarlas rápidamente para que todos vean si lo hecho coincide con la pizarra.

ESCENA 3

Pizarra

Graficar x^3

Libro : 5-14

Actividad (5 minutos, pupitre)

Comentario

Sugerirles que $x^3 = x \cdot x^2$

Esta actividad es parte de una actividad del capítulo 5, pero de manera natural corresponde al cuatro. Es bueno que el profesor dibuje la curva en la pizarra al final de la actividad. Debe

enfatizarse que para x en el intervalo $(-1,1)$ la curva debe estar por debajo de la curva de x^2 y en -1 y 1 debe coincidir con la x y x^2.
Se les puede sugerir hacer también la gráfica de x^2, pero utilizando $x^2 = x \cdot x$ y el producto.

ESCENA 4

Pizarra

Hacer la curva del Arcoseno de la página 4-13

Libro : 4-13

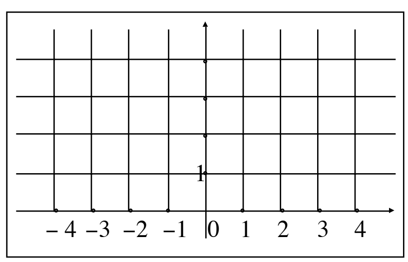
Actividad (5 minutos, pizarra)

Comentario

Esta curva es la inversa de la de una parte de la curva seno. Conviene hacer ver cómo a partir de un segmento de la curva seno ella se obtiene por simetría con la bisectriz del primer cuadrante. Explicar porqué no se simetriza toda la curva seno (daría una curva que no satisface nuestra convención del capítulo 1). También es bueno comenzar a insistir que esta curva es totalmente diferente a la curva $1/Sen(x)$, que fue hecha en la clase pasada. Una es la inversa funcional y otra es la compuesta del seno con la inversa numérica. Un grupo de alumnos tiene esa confusión y siempre que haya ocasión es conveniente abordarla.

ESCENA 5

Pizarra



Hacer la curva de la página 4-17.

Libro : 4-17

Actividad (3 minutos, pupitre)

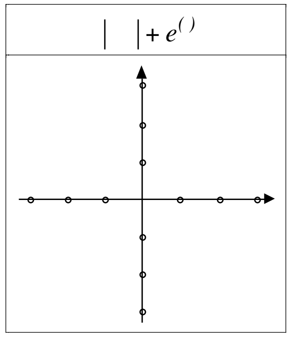
Construir la curva del valor absoluto.

Comentario

Esta curva es fundamental para el curso. Por ello conviene asegurarse que todos la conocen.

ESCENA 6

Pizarra



Libro : 4-27

Actividad (3 minutos, pupitre)

Comentario

Seguir insistiendo en las propiedades del Capítulo 2.

ESCENA 7

Pizarra

Grafique utilizando el camino de la compuesta $|Ln(x)|$

Libro : 4-29

Actividad (4 minutos, pupitre)

Comentario

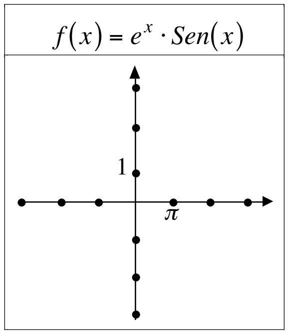
Se puede preguntar qué operación gráfica del Cap 2 se debe utilizar para hacer esta curva. Luego se puede recordar el camino de la compuesta.

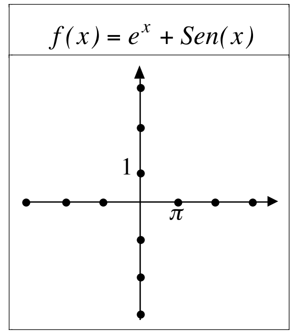
La actividad tiene la intención de hacer ver que las partes negativas del gráfico se simetrizan con respecto al eje x.

Y las positivas quedan inalteradas. Estas propiedades serán utilizadas en el Capítulo 7, al resolver inecuaciones que envuelven el valor absoluto de fórmulas.

ESCENA 8

Pizarra





Libro : 4-27

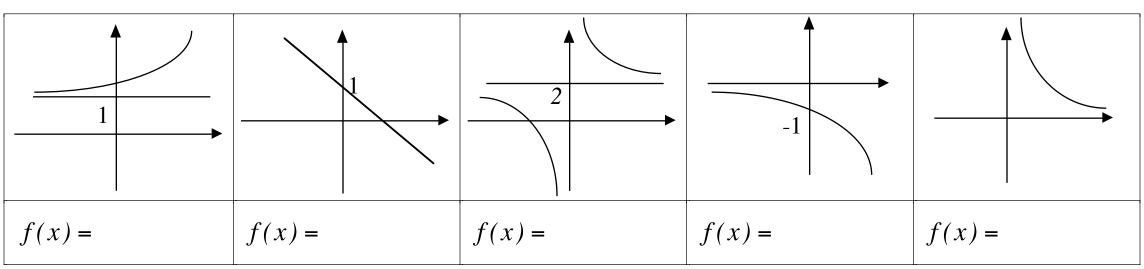
Actividad (5 minutos, pizarra y pupitre)

Comentario

Este tipo de curvas son importantes como modelos de curvas oscilantes para cuando se estudien los límites. En este caso es crucial tomar en cuenta los puntos de corte de la curva seno con el eje x.

ESCENA 9

Pizarra



Libro : 4-30

Actividad (5 minutos, pupitre)

Ponerle nombres de fórmulas a las curvas.

Comentario

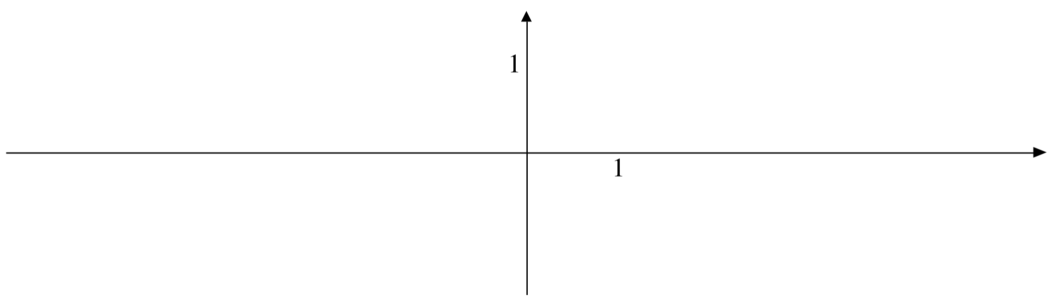
Esta actividad es muy importante. Es el comienzo del aprendizaje para ponerle nombres a las curvas. En el capítulo 4, toda la actividad ha sido centrada en pasar de una fórmula a su curva. Este ejercicio consiste en hacer el proceso inverso : dada una curva asignarle un fórmula. Desde el punto de vista cognitivo es fundamental : las formas curvas comienzan a tener un significado, son "reconocidas". La formación de ese mundo de significados es compleja. Los capítulos 6 y 8 tienen actividades que van en esa dirección. Ver tesis citada si quiere ampliar información.

FASE FINAL

ESCENA 10

Pizarra

Complete:



Libro : 4-7

Actividad (5 minutos, pupitre)

En la pizarra se puede situar primero a π. Y luego sugerir cómo situar las fracciones de π.

Comentario

Esta actividad tiene una dificultad adicional a las anteriores. Se trata de utilizar fracciones del número π. Situar esos valores sobre el eje x a veces causa problemas.

Suelen cometer bastantes errores a la hora de graficarla punto a punto. Es importante el circular entre los pupitres.

Vale la pena, al final de la actividad, comentar sobre las propiedades de la curva. (después que los estudiantes la han hecho). En particular los máximos, mínimos, puntos de corte y dónde son alcanzados.

ESCENA 11

Pizarra

Hacer la curva de la tangente .

Libro : 4-9

Actividad (5 minutos, pupitre)

Comentario

Es bueno hacer esta curva, porque se utiliza sobre todo para resolver en la página 5-23 el problema que apareció en la página 3-7.

ESCENA 12

Pizarra

Responder las preguntas de la Página 4-6.

Libro : 4-6

Actividad (5 minutos, pupitre)

Responder las preguntas.

Comentario

La curva de esta pregunta ha debido ser respondida en una actividad anterior. En esta actividad sólo se trata de responder las preguntas de la página.

CLASE 10

VISION GLOBAL

Debido a la escasez de tiempo, en general no se puede dar mas que una sola clase para el contenido del Capítulo 5. Esto obliga a hacer una selección de los temas. Los temas seleccionados son los que tienen que ver con algunas cuestiones que quedaron abiertas en los capítulos anteriores. Específicamente, las relacionadas con la noción de ecuación y de tecla inversa. Es un comienzo de estudio de existencia y unicidad de soluciones de una ecuación.
La clase tiene dos aspectos relacionados entre sí :

Resolución de ecuaciones.
Definiciones de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.

FASE INICIAL

ESCENA 1

Pizarra

Dudas

Libro : Capítulo 4

Actividad (10 minutos, pizarra, pupitre o consulta individual)

Comentario

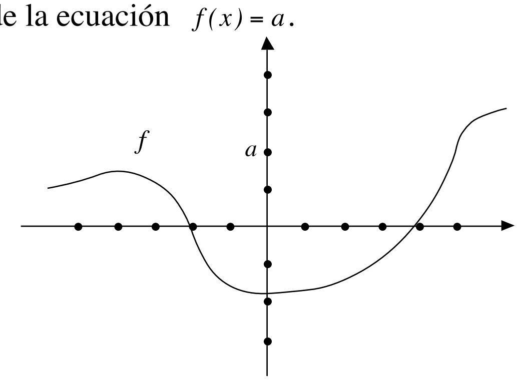
Es probable que exista un ambiente de tensión debido a la cercanía del primer parcial.

FASE MEDIA

ESCENA 2

Pizarra

Siendo f la curva que aparece en la figura. Marque sobre el eje x, el punto grueso que corresponde a la solución de la ecuación $f(x) = a$.



Libro : 5-21

Actividad (3 minutos, pizarra y pupitre)

Comentario

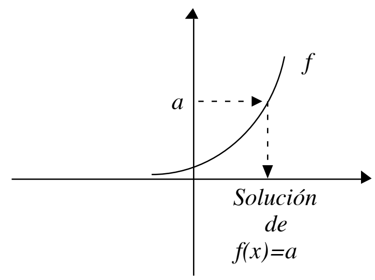
El hecho de preguntar por el punto grueso reduce el tanteo al conjunto de puntos gruesos y evita utilizar explícitamente la noción de camino inverso. Este comienza a utilizarse en la próxima actividad.

Se trata de que lean el comienzo de la página y de acuerdo a ello completen el ejercicio que aparece en la pizarra.

ESCENA 3

Pizarra

Para hallar, gráficamente, las soluciones de una ecuación, el camino inverso es el instrumento apropiado.



Libro : 5-21

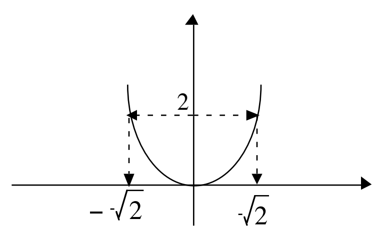
Actividad (2 minutos, pizarra)

Comentario

Puede ayudarse en su explicación mostrando o haciendo referencia a la página 3-10, donde se ve que "la" solución de la ecuación $f(x)=a$ es $f^{-1}(a)$.

ESCENA 4

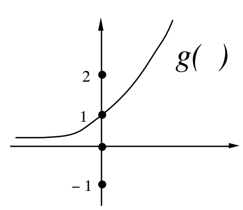
Pizarra



Libro : 5-21

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

Conviene en esta etapa hacer varios ejemplos, preguntandoles las respuestas de $g(x)=-1$, $g(x)=1$ y $g(x)=2$.



Comentario

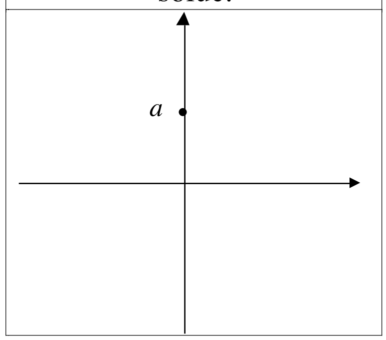
Estas actividades están dirigidas a plantear el problema de la existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación.

ESCENA 5

Pizarra

Graficar una curva f que satisfaga la condición dada en el recuadro

$f(x) = a$ tiene infinitas soluc.



Libro : 5-22

Actividad (3 minutos, pupitre)

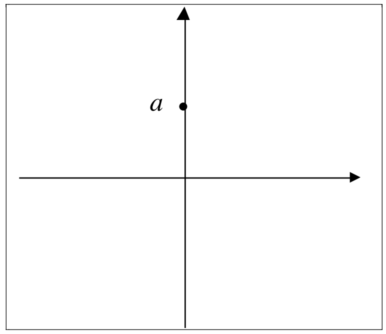
Comentario

Esta es la actividad inversa a la que se ha hecho hasta ahora en el capítulo : no se trata de hallar soluciones dada la curva, sino que dadas condiciones del conjunto solución, dar una curva tal que la ecuación relacionada con ella tenga una solución que satisface las condiciones.

ESCENA 6

Pizarra

Las dos soluciones de $f(x) = a$ son positivas



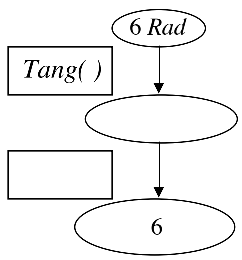
Libro : 5-22

Actividad (2 minutos, pupitre)

Comentario

ESCENA 7

Pizarra



En la página 3-7, el ejercicio ha debido causarle problemas. La calculadora no se comportó de la manera esperada. La explicación a ese comportamiento inesperado se puede obtener haciendo la página 5-23.

Libro : 5-23

Actividad (8 minutos, pupitre y pizarra)

Hacer la página 5-23.

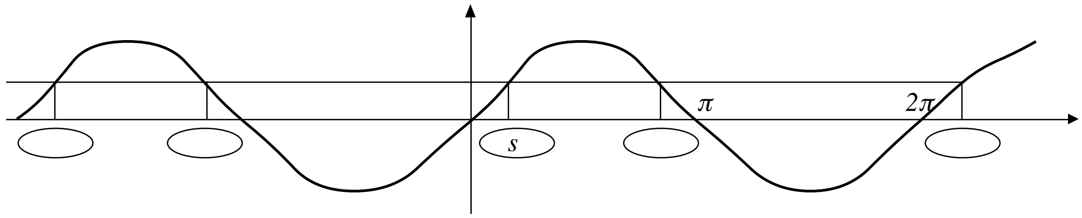
Comentario

Punto clave : que ellos sitúen adecuadamente sobre el eje x el 6, en los dos casos. Este es un ejercicio importante. Es útil para comprender que las calculadoras económicas sólo dan una de las soluciones de una ecuación. (Algunas menos económicas dan varias soluciones posibles).

Se puede preguntar cuánto hay que sumarle a $-0.28...$ para obtener el 6. Y qué relación tiene ese número con π.

ESCENA 8

Pizarra



Para llenar las elipses utilizar expresiones que sólo contengan la letra s , –s y múltiplos de π o 2π.

Libro : 5-24

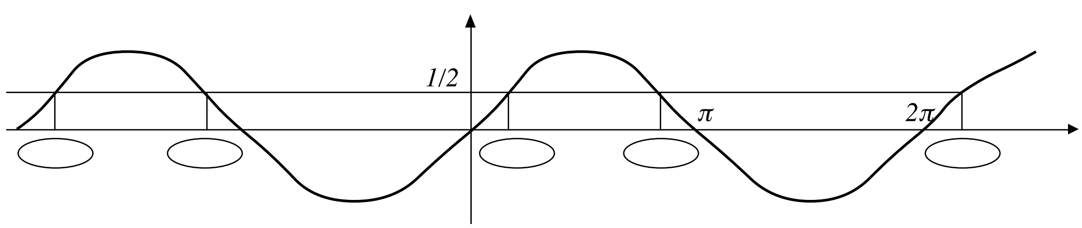
Actividad (3 minutos, pupitre)

Comentario

La mayoría de los estudiantes tienen dificultades para ponerle nombres a los puntos utilizando los nombres de otros puntos y las relaciones geométricas evidentes que aparecen en las figuras. Esto es una falla mayor del bachillerato y dificulta la transmisión de razonamientos de cálculo. Por ello buena parte del trabajo que debe hacer el alumno en MG gira alrededor de la codificación de objetos y principalmente puntos y curvas. El ejercicio de esta actividad es útil en ese sentido : ayuda a desarrollar la capacidad de codificación.

ESCENA 9

Pizarra



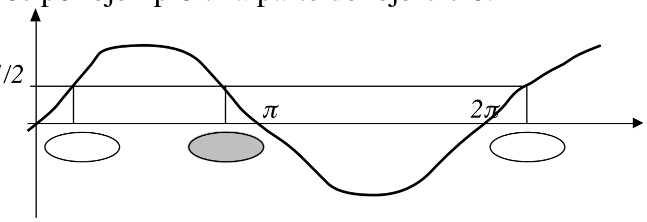
Libro : 5-24

Actividad (3 minutos, pupitre)

Comentario

Similar a la anterior, pero numérica. Hay que indicar que la primera elipse a la derecha del origen se obtiene con la calculadora (puesta en radianes). En nuestro caso sería 0.5235987.

Para dar el nombre de un punto en general hay que tomar un punto cercano con nombre y en base a él ver qué operación hay que hacer para llegar a partir de él al punto al que se le quiere dar un nombre. Tomemos por ejemplo una parte del ejercicio:



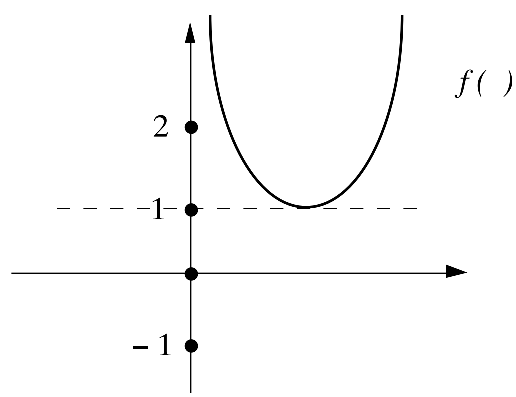
Supongamos que se quiere dar nombre al punto que corresponde a la elipse sombreada. El punto más cercano que tiene nombre es el corte de la curva con el eje x. Su nombre es π. Para pasar de ese punto al de la elipse hay que ir de derecha a izquierda. En términos numéricos el nuevo nombre debería ser menor que π. El nombre debe ser π menos algo.

¿Cuánto debe valer ese algo? Mirando el gráfico se "ve" que la distancia que hay entre π y el sombreado es la misma que hay entre el origen y la proyección del primer corte de la recta 1/2 con la curva. El nombre o abcisa de ese punto se obtiene con la calculadora. Es : 0.5235987. Y por lo tanto el nombre del punto que corresponde a la parte sombreada es $\pi - 0.5235987$.

Estos detallados comentarios que se acaban de hacer serían superfluos si los estudiantes trajeran una cultura de codificación de puntos. Debido que carecen de ella hay que proceder con mucho cuidado y detalle.

ESCENA 10

Pizarra



Halle al menos un valor de c tal que la ecuación $f(x) + c = -1$ tenga dos soluciones.

Libro : no está en MG

Actividad (3 minutos, pupitre)

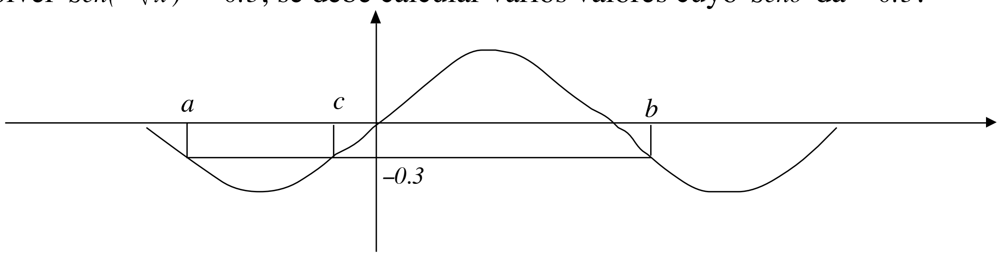
Comentario

Podría preguntar para iniciar la actividad, cuál es el efecto sobre el gráfico de sumarle un número a una fórmula (cómo se "relacionan" los gráficos de dos curvas que corresponden a dos fórmulas que difieren por la suma de una constante).

ESCENA 11

Pizarra

Para resolver $Sen(-\sqrt{x}) = -0.3$, se debe calcular varios valores cuyo $Seno$ da -0.3.



Libro : 5-25

Actividad (10 minutos, pizarra y pupitre)

Hallar a, b, c. y con ello dar algunas soluciones de la ecuación $Sen(-\sqrt{x}) = -0.3$.

Comentario

Este tipo de ejercicios es complicado para los estudiantes. Y para explicarlo también. Se puede hacer con sólo los tres valores que aparecen en la figura. (Aunque la solución general tiene infinitos valores).

De ecuación $Sen(-\sqrt{x}) = -0.3$, se pasa a tres ecuaciones :

$$-\sqrt{x} = a$$

$$-\sqrt{x} = b$$

y

$$-\sqrt{x} = c$$

Podrían ser más ecuaciones. Esto no lo entiende la mayoría de los estudiantes.

En general, cada vez que se debe "invertir" una tecla no invertible de una ecuación, aparece una familia de ecuaciones. Y cada una de estas ecuaciones puede a su vez tener una, muchas o ninguna solución. Es conveniente ayudarse con el diagrama.

Otra manera de ver las infinitas soluciones es al regresarse en el diagrama y al aplicar "la inversa del seno" en vez de poner sólo el número que da la calculadora, dar la fórmula que caracteriza los números del conjunto inverso.

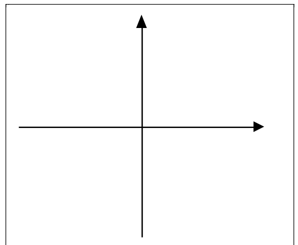
No conviene hacer de este tipo de preguntas una cuestión de honor. Este tipo de actividad es retomado explícitamente en la página 8-15, para hallar los puntos de corte de una curva con el eje x. Eso da ocasión de seguir madurando este tema.

FASE FINAL

ESCENA 12

Pizarra

Hacer el ejercicio que sigue y todos los de las dos filas de cuadros de la página



f tiene al menos dos alturas iguales

Libro : 5-26

Actividad (5 minutos, pupitre y pizarra)

Que el alumno complete en su libro los ocho recuadros.
Haga notar que las condiciones de la segunda fila son lo contrario, en un sentido laxo, de la de la primera fila (si se entiende a dos como más de uno).
Tomar y comentar el último cuadro para enunciar la definición de inyectividad.
Preguntar rápidamente cuáles de las teclas son inyectivas y cuales no.

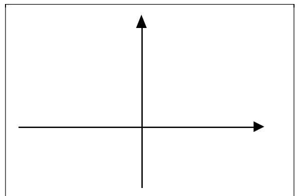
Comentario

El objetivo del ejercicio es utilizar el cuadro gráfico para poner en evidencia la equivalencia entre las condiciones de los diferentes recuadros. En efecto, la misma curva sirve para los cuatro cuadros.de una misma fila. Pero este hecho el alumno deberá descubrirlo, el no lo sabe a priori porque no ve la equivalencia entre las condiciones, enunciadas simbólicamente, de los diferentes recuadros.
El hecho de parafrasear la condición que niega la inyectividad de cuatro maneras diferentes pone en evidencia la relación estrecha entre inyectividad y unicidad de la solución de una ecuación que utiliza la función inyectiva.

ESCENA 13

Pizarra

Hacer el ejercicio que sigue y todos los de las dos filas de cuadros de la página



f no alcanza todas las alturas posibles.

Libro : 5-27

Actividad (5 minutos, pupitre)

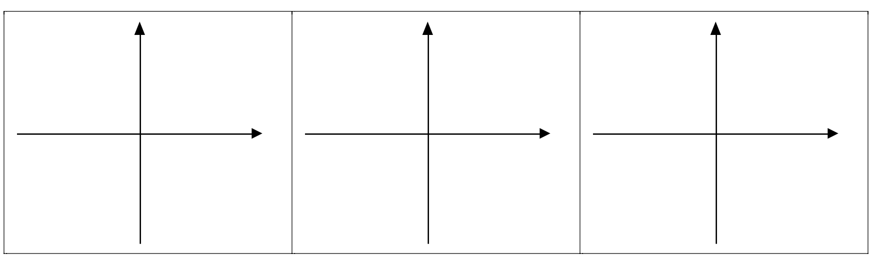
El esquema de trabajo es similar a la actividad sobre inyectividad.

Comentario

El concepto de sobreyectividad es mucho más abstracto que el de inyectividad. Con esta actividad sólo se pretende poner esa noción en juego, en el caso muy particular de las funciones de una variable real.

ESCENA 14

Pizarra



Libro : 5-28

Actividad (5 minutos, pupitre y pizarra)

Explicar la primera mitad de la página. Completar esos cuadros con f , g y h.

Comentario

Esta actividad sirve para hacer ver que una fórmula no define una función, ni siquiera su dominio.. Es necesario tanto una regla de correspondencia (que en nuestro caso es una fórmula), como un dominio y un conjunto de llegada.

ESCENA 15

Pizarra

Hacer los ejercicios de la segunda parte de la página

Libro : 5-28

Actividad (5 minutos, pupitre y pizarra)

Se puede dejar unos minutos hacer estos ejercicios.

Luego se puede preguntar cuales teclas son biyectivas.

Comentario

CLASE 11

VISION GLOBAL

En esta clase se cubren los temas restantes del Capítulo 5, no cubiertos en la clase anterior. Estos temas consisten principalmente :

Un uso especializado de las técnicas del capítulo 4 para graficar polinomios y funciones racionales.

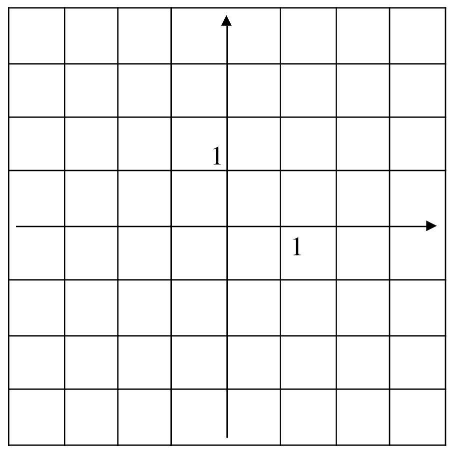
Un estudio de los logaritmos y exponenciales en diferentes bases.

FASE INICIAL

ESCENA 1

<u>Pizarra</u>

Trace la recta que pasa por $(0,0)$ y $(1,2)$.



<u>Libro : 5-1:</u>

<u>Actividad (3 minutos, pupitre)</u>

Hacer el ejercicio que corresponde a esa gáfica en la Página 5-1.

<u>Comentario</u>

La intención de

"Complete mirando las alturas de la recta:

$(1,\quad),(2,\quad),(3,\quad),(4,\quad).(-1,\qquad),(-2,\qquad),(-3,\qquad),(-4,\qquad)$"

es la de conseguir la relación funcional entre la abcisa y la ordenada de los puntos de la recta.

Esta es de hecho la pregunta que sigue:

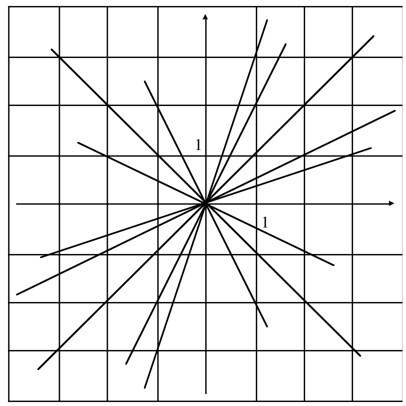
¿Qué hay que hacer con la abcisa (x) de cada par para obtener su ordenada (y)? ____

El siguiente requerimiento es una expresión simbólica de la respuesta a la anterior pregunta.

Complete: $\boxed{(x,\qquad)}$ $\qquad$ $\boxed{y=\qquad}$

ESCENA 2

Pizarra



Libro : 5-2

Actividad (4 minutos, pupitre)

Comentario

Conviene aclararles cuál es la "primera recta", "la segunda..", etc.

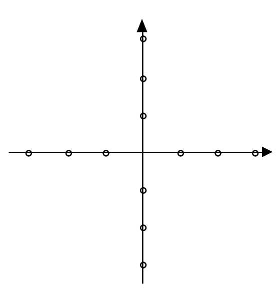
La idea para decir qué fórmula va después de $f(x) =$ es la del ejercicio anterior. Se puede preguntar por ejemplo en qué se convierte el 1 y el -1. (Así se ve que no puede ser una suma. Que parece más bien un producto, etc...)

La intención con este ejercicio es hacer aparecer en el "medio de la situación" el conjunto de las rectas que pasan por el orígen y sus respectivas fórmulas. Esto es necesario para la siguiente actividad.

FASE MEDIA

ESCENA 3

Pizarra



$y = 2x - 1$

Libro : 5-3

Actividad (3 minutos, pupitre)
Hacer el ejercicio.

Comentario
Leer la indicación, que aparece en la página, para hacer el ejercicio : "primero graficar $a(\ )$ y luego $a(\ )+b$".

ESCENA 4

Pizarra

$(x+d)(x+r)$	$(x-1)(x+2)$
 *Gráfico de las dos rectas y de su curva producto.*	
$x^2+(d+r)x+d\cdot r$	
x^2+bx+c	

Libro : 5-4

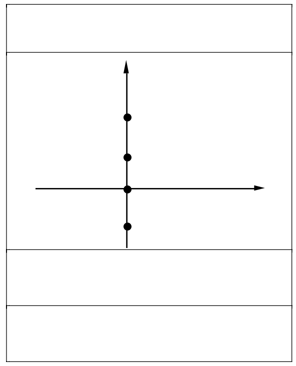
Actividad (3 minutos, pupitre)
Explicar el ejercicio que corresponde a $(x-1)(x+2)$, basándose en la forma adyacente, que explicita cómo debe llenarse cada recuadro.

Comentario
Como siempre es conveniente "acompañar" al estudiante en la lectura de la forma. Por ejemplo hacerle notar (y hacerle la multiplicación en la pizarra) que $x^2+(d+r)x+d\cdot r$ se obtiene de $(x+d)(x+r)$ efectuando el producto. Igualmente que x^2+bx+c se obtiene a partir de $x^2+(d+r)x+d\cdot r$ efectuando las operaciones. Es decir que $d+r=b$ y $d\cdot r=c$

Con este tipo de ejercicio se inicia una serie de actividades que giran alrededor del polinomio de segundo grado. Se explotan características particulares de las formas canónicas de ciertos subconjuntos de polinomios ($(x+d)(x+r)$ y $(x+d)^2$) para reforzar lo aprendido en el Capítulo

4 y comenzar el estudio de los polinomios de segundo grado. Las formas particulares de estos polinomios posibilitan algoritmos, para su graficación aproximada, muy rápidos.

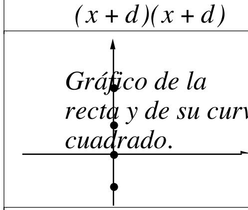
Las actividades de inversión de estas formas



son interesantes. A partir de los polinomios de la última línea del ejercicio, (x^2+bx+c o $x^2+2dx+d^2$) no es fácil saber si se trata de un polinomio tipo $(x+d)(x+r)$ o $(x+d)^2$ o de ninguna de las dos. Esto lo descubre el alumno al final de la inversión. Al no llegar a una de las formas (de fórmula) esperadas, que son la base del algoritmo de graficación, queda abierta la pregunta : ¿Cómo graficar este polinomio, que no corresponde a ninguno de los tipos canónicos tratados? Esto permite introducir la noción de "completación de cuadrados", como un artificio algebraico útil para graficar esas formas más generales de binomios. (Final Pág, 5-7). En la Página 5-11 se utiliza la completación de cuadrados para graficar binomios.
Pero existe una técnica algebraica mucho más general, que facilita grandemente la graficación de polinomios, incluidos los de segundo grado. Esta técnica es la que aparece al final de la página 5-12.
Todo este trabajo es muy productivo desde el punto de vista del aprendizaje, pero hace falta un mínimo de tiempo para cubrirlo.

ESCENA 5

<u>Pizarra</u>

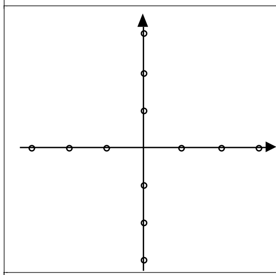
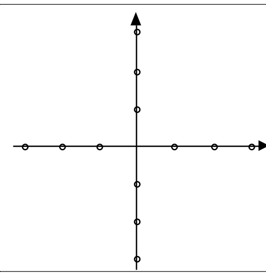
$(x+d)^2$	$(x+3)^2$
$(x+d)(x+d)$	
 *Gráfico de la recta y de su curva cuadrado.*	
$x^2+(d+d)x+d\cdot d$	
$x^2+2dx+d^2$	

Libro : 5-6

Actividad (3 minutos, pizarra)
Explicar el ejercico y la forma.
Comentario
Este es el segundo tipo de binomio que comentamos más arriba.

ESCENA 6

Pizarra

	
$x^2 - 24x + 144$	$x^2 - 24x + 145$ ojo!

Libro : 5-7

Actividad (5 minutos, pupitre)
Hacer los dos ejercicios.
Comentario
Este ejercico es importante porque hace aparecer un binomio general (salvo el hecho de que el coeficiente del término cuadrático es 1) como la suma de uno del tipo cubierto en el ejercicio de 5-6 ("cuadrado perfecto") y un número.

ESCENA 7

Pizarra

$$x^2 + bx + c = \left(x + \overset{\frac{(\ \ )}{2}}{\qquad}\right)^2 + c - \underset{(\ \ )^2}{\qquad}$$

Libro : 5-8

Actividad (3 minutos, pizarra)
Explicar esta manipulación algebraica.

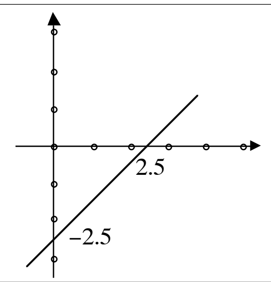
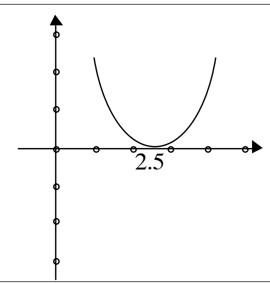
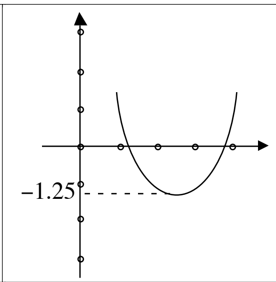
Comentario
Después de explicarla sería conveniente aplicarla al último ejemplo de graficación : $x^2 - 24x + 145$. Para mostrar la relación de la manipulación (de completar cuadrado) con lo que se viene haciendo.

ESCENA 8

Pizarra

<table>
<tr>
<td>$x^2 - 5x + 5$

Se escribe como:

$(x - 2.5)^2 - 1.25$</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Libro : 5-11

Actividad (3 minutos, pizarra)
Explicar el ejercicio.

Comentario
Este ejercicio muestra la aplicación de la completación de cuadrados para la graficación del binomio.

ESCENA 9

Pizarra
Graficar $x^2 - 2x + 3$
Libro : 5-12

Actividad (3 minutos, pupitre)
Hacer el ejercicio correspondiente de la página.

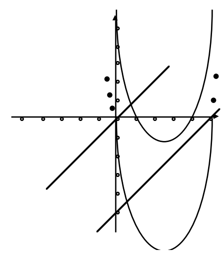
Comentario

Oportunidad para que el estudiante confronte a la nueva técnica.

ESCENA 10

<u>Pizarra</u>

$x^2 - 5x + 5$ se escribe como $x(x-5)+5$



<u>Libro : 5-12 y 5-13</u>

<u>Actividad (3 minutos, pizarra)</u>

Explicar cómo se grafica $x(x-5)+5$.

<u>Comentario</u>

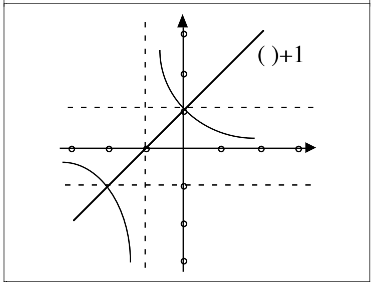
Hacer ver que da lo mismo que haciendolo por completación de cuadrados.
Hacer ver las ventajas que tiene con respecto a graficar directamente $x^2 - 5x + 5$ o $x^2 + (-5x + 5)$ (en este caso la suma se vuelve confusa a la derecha del eje x porque hay que hacer algo que es equivalente a $\infty - \infty$).

Se han dado, de manera apresurada varias posibles técnicas de graficación de polinomios de segundo grado. Los alumnos tienden a recordarse de algunas y olvidarse de otras. Rara vez logran tener un cuadro claro de cada una y de su dominio de aplicación. Sin embargo el tópico, al igual que el de las fórmulas racionales, se presta para ver la utilidad de formas equivalentes de una fórmula : cada forma produce algoritmos diferentes en el plano cartesiano. Y algunos son más ventajosos que otros. De este modo la manipulación algebraica puede hacerse en un cuadro donde adquiere sentido práctico (utilitario) : el alumno puede ver un sentido práctico a sacar factor común o a factorizar..etc.

ESCENA 11

<u>Pizarra</u>

$$y = \frac{1}{x+1}$$



Libro : 5-15

Actividad (3 minutos, pizarra)

Explicar el ejercicio.

Comentario

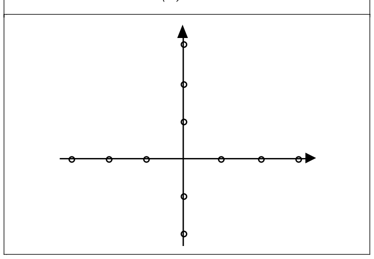
Con esta actividad se inicia el conjunto de las destinadas a la graficación de funciones racionales. En parte son provechosas para que los estudiantes no crean que todas ellas son hipérbolas.

Explicar el ejercicio recordando las reglas de graficación de un cociente : en puntos de corte con el eje x no puede haber curva porque $1/0$ no existe, uno entre pequeño positivo da grande positivo, etc..

ESCENA 12

Pizarra

$$\frac{1}{(\ )-1}$$



Libro : 5-15

Actividad (3 minutos, pupitre)

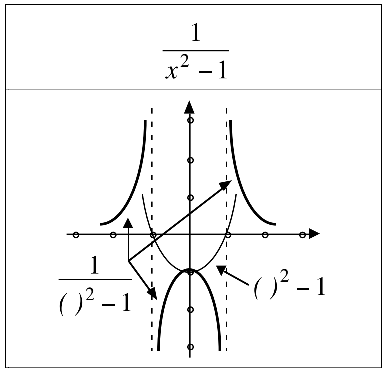
Hacer el ejercicio.

Comentario

Dar la oportunidad al estudiante de enfrentar la técnica.

ESCENA 13

Pizarra



Libro : 5-17

Actividad (3 minutos, pizarra)

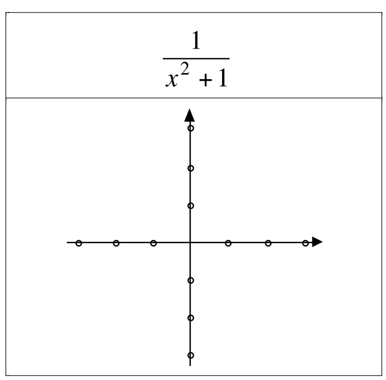
Explicar el ejercicio.

Comentario

Conviene utilizar dos colores para las curvas : uno para $(\ )^2-1$ y otro para $\frac{1}{(\ )^2-1}$.

ESCENA 14

Pizarra



Libro : 5-18

Actividad (3 minutos, pupitre)

Hacer la gráfica de la fórmula.

Comentario

Es llamativo cuán diferentes son los gráficos de la actividad anterior y la de esta.

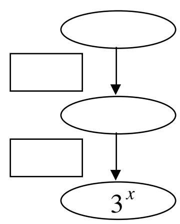
FASE FINAL

ESCENA 15

Pizarra

$$2^x = \left(e^{Ln(2)}\right)^x = e^{Ln(2)\cdot x}.$$

Complete de manera adecuada:



Libro : 5-19

Actividad (2 minutos, pizarra)

Completar el diagrama.

Comentario

Completar el diagrama utilizando respuestas de los alumnos (a preguntas hechas desde la pizarra).

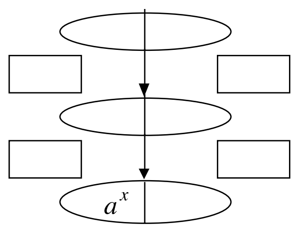
Para tener idea del comportamiento gráfico de la familia de las exponenciales, a medida que la base varía, se necesitan las herramientas del Capítulo 8. En su defecto, las estrategias habituales utilizan la actividad del comienzo de la página 5-19, en la cual se grafica, punto a punto algunos elementos de dicha familia y luego mediante comparaciones se infieren algunas tendencias de comportamiento (que va a pasar a la curva cuando $a^{(\ )}$ cuando a crece, o cuando a es menor que 1, etc).Seguiremos otra vía para abordar el tema.

El tratamiento de la familia de los logaritmos y exponenciales de diferentes bases puede hacerse de manera muy económica con los recursos de que dispone el alumno a estas alturas del curso. Para ello hay que poner en juego los conceptos desarrollados. Un primer aspecto es el de ver

que todas las exponenciales se pueden obtener componiendo la exponencial con una recta que pasa por el orígen y cuya pendiente es el logaritmo neperiano de la base.
Por otro lado el hecho, ya conocido por ellos, de que el logaritmo neperiano es el inverso de la exponencial, es generalizado a las diferentes bases. Esto permite dar la definición del logaritmo en una base arbitraria.
El tratamiento sugerido se hace en dos etapas, la primera de ellas es la que se está haciendo en esta escena. La segunda se ataca en la siguiente.

ESCENA 16

Pizarra



Libro : 5-19

Actividad (2 minutos, pupitre)
Completar el diagrama.

Comentario
Antes de iniciar la actividad debería recalcar desde la pizarra que (de acuerdo a lo que se acaba de hacer en la actividad anterior) $a^{(\ )} = e^{(\ )\cdot Ln(a)}$. Ya que esta identidad es la que les permitirá hacer el diagrama. Además es conveniente hacer notar que $Ln(a)$ es un número.

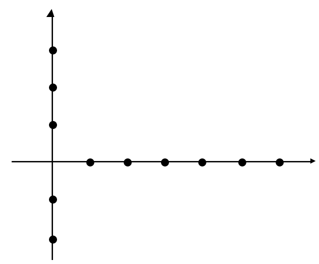
Para llenar el diagrama inverso ponga $(\ )$ en la parte derecha de la última pantalla del diagrama. De manera que al final, a los estudiantes les quede $\frac{Ln(\ )}{Ln(a)}$ a la derecha de la primera pantalla del diagrama.

Teniendo esto puede hacer notar que como la inversa de lo de abajo es lo de arriba y además la inversa de $a^{(\ )}$ es $Log_a(\ )$, se obtiene la identidad $Log_a(\ ) = \frac{Ln(\ )}{Ln(a)}$. Esta identidad es fundamental para la próxima actividad, porque muestra que cualquiera de los logaritmos no es más que el logaritmo neperiano por una constante y esta operación (producto por constante) ya los alumnos saben hacerla gráficamente. Y es lo que les va a permitir hacer los gráficos de la familia de los logaritmos de diferente base.

ESCENA 17

Pizarra

Graficar $Ln(\ ), Log_2(\ ), Log_3(\ ), Log_{0.5}(\ )$



Libro : 5-20

Actividad (5 minutos, pupitre)

Comentario

Sugiera que expresen cada uno de los logaritmos como el logaritmo neperiano por la constante $\frac{1}{Ln(a)}$, (con el apropiado a).

ESCENA 18

Pizarra

Graficar $e^{(\ )}, 2^{(\ )}, 3^{(\ )}, 0.5^{(\ )}$

Libro : no figura en MG

Actividad (3 minutos, pupitre)

Comentario

Puede dejar esta actividad para la casa. Se trata de utilizar el hecho de que dos curvas que corresponden a gráficas de fórmulas que son inversas (una de la otra) son simétricas con respecto a la bisectriz.

CLASE 12

VISION GLOBAL

El Capítulo 6 es un capítulo relativamente estandar. Sin embargo, puede llamar la atención la extensión del trabajo con las rectas, parábolas e hipérbolas. La razón de esta gran insistencia es que es necesario asegurar un dominio fluido de las ideas de tipo funcional, que tienen que ver con esos objetos.

Por ejemplo, entender a cabalidad la interpretación geométrica de la derivada exige tener una idea fluida de la pendiente de la recta. Este conocimiento debe incluir la fórmula de la pendiente de la recta a partir de las coordenadas de dos puntos por donde ella pasa y también el hecho de que en la fórmula la pendiente es el número que multiplica a la variable y que ese número "controla" (para los efectos prácticos) la inclinación de la recta.

Otro ejemplo es el de la completación de cuadrados. Este tipo de operaciones algebraicas es muy útil en la resolución de integrales. El acostumbrarse a las "formas canónicas" y saber pasar de una a otra es necesario en ese tema.
Finalmente el tema de inecuaciones de una variable tiene que ver con este tipo de curvas. Saberlas graficar prestamente, ayuda considerablemente en la resolución de buena parte de los ejercicios del tema de inecuaciones.

La selección de las actividades de cada clase ha sido hecha teniendo en mente no saturar al estudiante con el tema. Por ello en la primera clase se tratará parte de la recta y de la parábola. En la segunda clase se tratará parte de los tres tipos de curvas. Esto se hace con la idea de que el estudiante pueda descansar y pueda tener la oportunidad de ver al menos durante dos clases los dos tipos de curvas que necesita dominar mas (rectas y parábolas).

FASE INICIAL

ESCENA 1

<u>Pizarra</u>

Dudas.

<u>Libro : Capítulo 5</u>

<u>Actividad (10 minutos, pizarra, pupitre o consulta individual)</u>

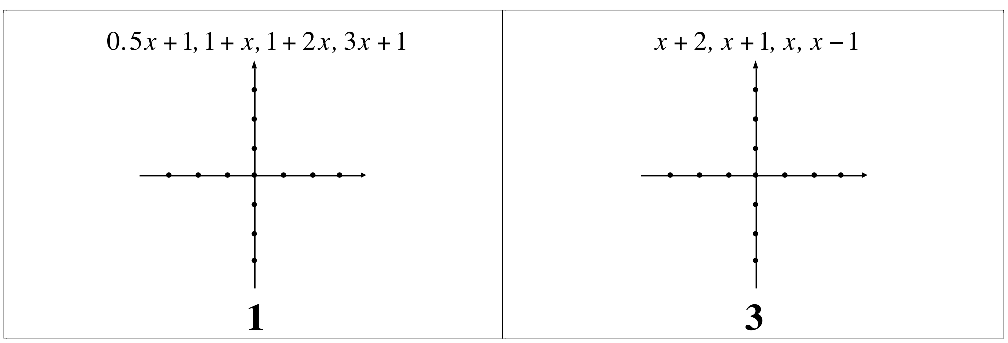
Contestar didaas

<u>Comentario</u>

FASE MEDIA

ESCENA 2

<u>Pizarra</u>



<u>Libro : 6-1</u>

<u>Actividad (Pizarra, 3 minutos)</u>

Hacer las rectas.

<u>Comentario</u>

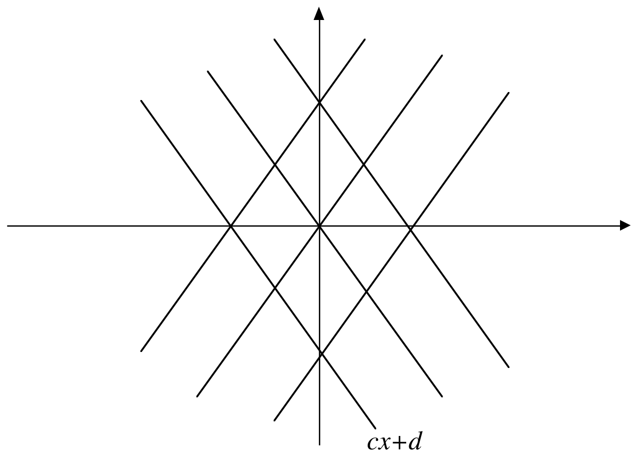
Esta actividad es para introducir la noción de coeficiente: el número que multiplica al x, y el número que se suma o resta.

Se puede hacer ver (esto es lo que se intenta con las preguntas de la página 6-2) que el coeficiente que multiplica tiene que ver con "la inclinación de la recta" . A esas alturas no conviene hablar de la noción de tangente del ángulo que forma la recta con el eje x.

Hacer ver que el número que suma o resta (en la fórmula) "es" la altura de la recta en el eje y (es decir, la ordenada del punto de corte de la recta con el eje y).
Es bueno que este ejercicio (sólo los cuadros 1 y 3) se hagan en pizarra porque los alumnos se tardan bastante en ellos y cuesta transmitirles el enunciado.

ESCENA 3

Pizarra



Libro : 6-3

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

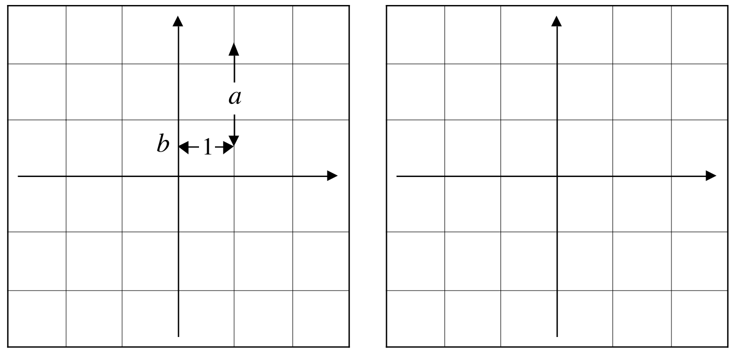
La indicada en la página.

Comentario

Esto es una actividad que conviene hacer en el pupitre porque lleva poco tiempo y hace repensar a los alumnos "el descubrimiento" de la primera actividad.
Iguales coeficientes que multiplican al x aparentemente hace que las respectivas rectas sean paralelas entre ellas.
Igualmente este ejercicio ayuda al alumno a entender y utilizar la información gráfica presente en el otro coeficiente.
El hecho de hacerlo sólo con letras facilita ese trabajo cualitativo.
Una manera de ver que la pendiente de las que no son paralelas a $cx+d$ es $-c$ es comparando las dos rectas que pasan por el origen. Una de ellas tiene por fórmula cx. La otra se ve que resulta de multiplicar a la de cx por -1. Por lo tanto la otra recta tiene por fórmula $-1(cx)$. Pero esto, por asociatividad es igual a $(-1 \cdot c)x$. Finalmente esto es igual a $-cx$.

ESCENA 4

Pizarra



$ax + b$ $\qquad\qquad$ $2x - 1$

Libro : 6-4

Actividad (Pizarra y pupitre, 4 minutos)

Primeramente explicar el cuadro donde aparecen letras. Luego hacer en la pizarra $2x-1$. Finalmente pedir que hagan en el pupitre el que sigue en el libro . Sugerir que comiencen por el coeficiente que no multiplica a x.

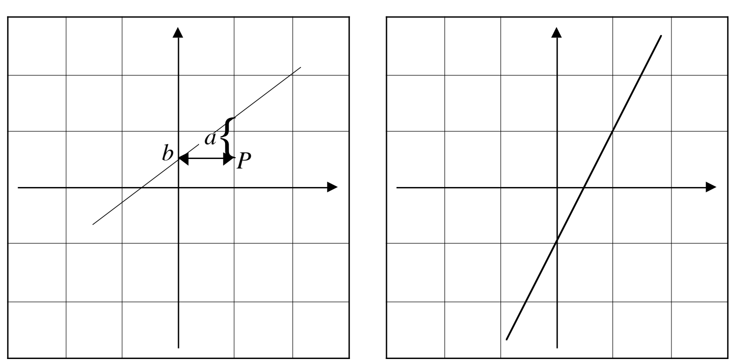
Comentario

Conviene leer con (o para) ellos, en voz alta, las indicaciones previas al ejercicio.

Este ejercicio es un poco mecánico. No conviene justificar porqué esa manera de proceder es correcta. La finalidad es dar, sin justificación, un procedimiento para utilizar "gráficamente" los valores de los coeficientes para dibujar rápidamente la recta. Observe que no se trata de calcular la altura utilizando la fórmula para dos valores de x. (Aunque es equivalente a ello, desde un punto de vista matemático).

ESCENA 5

Pizarra



Libro : 6-5

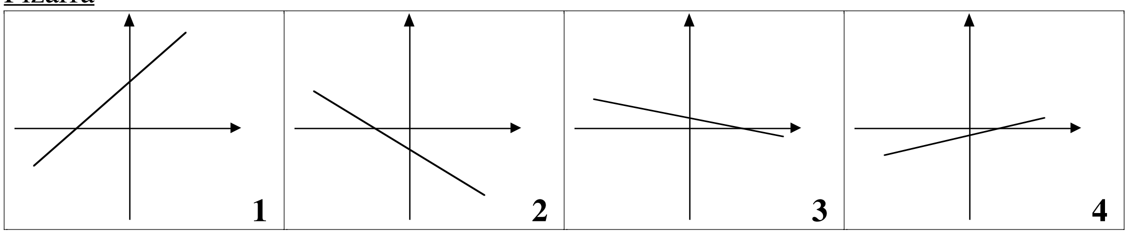
Actividad (Pizarra y pupitre, 4 minutos)

Comentario

Esta actividad desarrolla una cierta manera de mirar la recta. Es la inversa de la anterior. Dada una recta, utilizar la información gráfica para, sin calcular, hacer la fórmula de la recta. Conviene proceder de manera similar a la actividad anterior: ejemplo trabajado en la pizarra por el profesor y luego uno en pupitre.

ESCENA 6

Pizarra



Libro : 6-6

Actividad (Pupitre, 4 minutos)

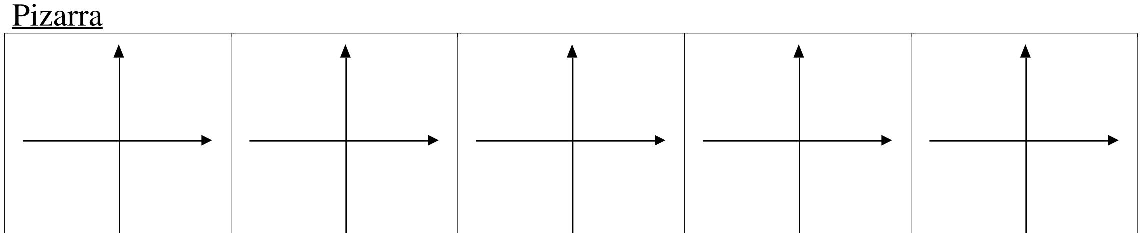
Hacer lo sugerido en la página.

Comentario

Dejarlos hacer unos cuantos ejercicios. La finalidad de este ejercicio es que vayan asentando y haciendo accesible rápidamente el significado gráfico de los coeficientes. Por ello ha sido diseñado utilizando sólo información parcial: el signo de cada coeficiente. Esto impide el uso de mecanismos numéricos y además al ser menos información (sólo signo) hace que el ejercicio se pueda hacer rápidamente.

ESCENA 7

Pizarra



$a > 0, b > 0$	$a > 0, b < 0$	$a > 0, b = 0$	$a < 0, b < 0$	$a < 0, b = 0$

Libro : 6-7

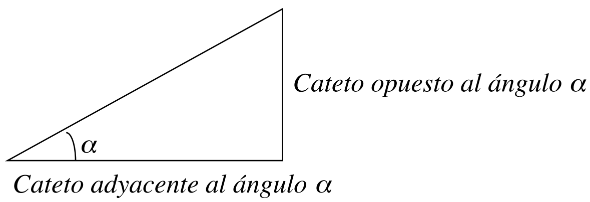
Actividad (Pupitre, 3 minutos)

Comentario

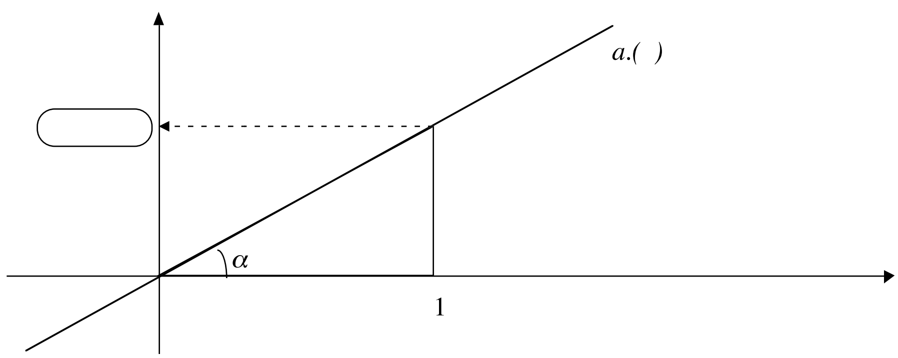
Actividad inversa de la anterior. Los últimos ejercicios de la lista de la página no son triviales, para nuestros alumnos.

ESCENA 8

Pizarra



$$Tang(\alpha) = \frac{\text{Longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{Longitud del cateto adyacente a } \alpha}$$



Libro : 6-7, 6-8

Actividad (Pizarra, pupitre, 5 minutos)

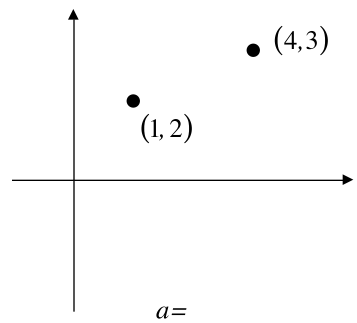
El primer paso es comprender que el número que multiplica al x se puede obtener también sacándole la tangente al ángulo que forma la recta con el eje x, medido del eje a la recta. Para ello hay que acordarse cómo se calcula la tangente de un ángulo de un triángulo rectángulo. Después se puede pedir completar la página 6-8.

Comentario

El objetivo de esta actividad es iniciar al alumno en el cálculo de los coeficientes de una recta cuando la información que se dispone son las coordenadas de al menos dos puntos por donde ella pasa. Para ello es importante recordar la noción de tangente de un ángulo en un triángulo y ver cómo se aplica para calcular la pendiente de una recta en el plano cartesiano. Las páginas señaladas para la actividad intentan hacer esto gradualmente : primero con rectas que pasan por el orígen y luego para cualquier recta, descubriendo cuál es el triángulo que va a servir para calcular la tangente (hay varios posibles con el ángulo que forma la recta con el eje x, pero hay uno sólo al cual se le puede calcular muy fácilmente la longitud de los catetos, conocidas las coordenadas de dos puntos por donde pasa la recta). El proceso de descubrir (con los alumnos) cuál es el triángulo que sirve es útil.

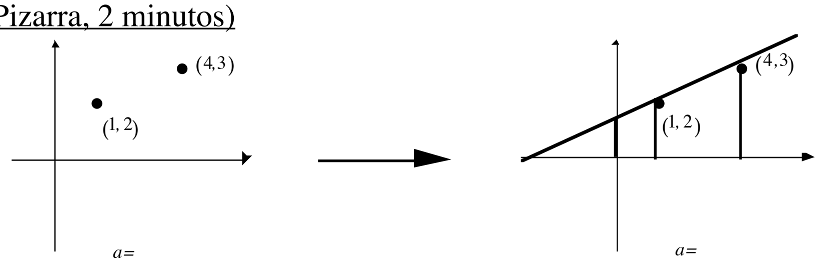
ESCENA 9

Pizarra



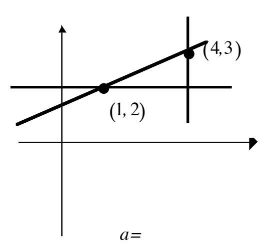
Libro : 6-10

Actividad (Pizarra, 2 minutos)



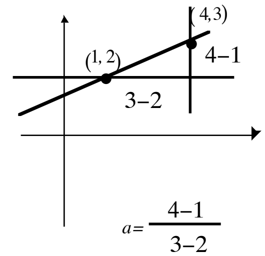
Hacer ver que en la segunda figura hay tres triángulos semejantes, que tienen en común el ángulo al cual hay que calcularle la tangente para saber la pendiente de la recta. Hacer ver que se desconoce el punto de corte de la recta con el eje x y por lo tanto calcular la longitud del cateto adyacente al ángulo en cualquiera de los tres triángulos no parece evidente.

Hay que darse otro triángulo. Pregunte a los estudiantes a ver qué idea tienen. La solución es trazar una horizontal al eje x que pasa por el punto más bajo y una vertical que pasa por el punto que está más a la derecha.



La mayoría de los estudiantes comprende porqué el ángulo cuyo vértice está en el punto $(1,2)$ mide igual que el que forma la recta con el eje x.

A partir de aquí aplicando la definición de tangente de un ángulo de un triángulo rectángulo es fácil llegar al valor de la pendiente. Y a la figura



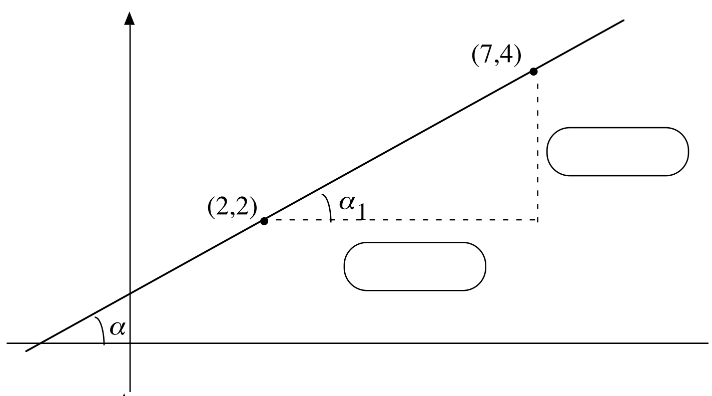
Comentario

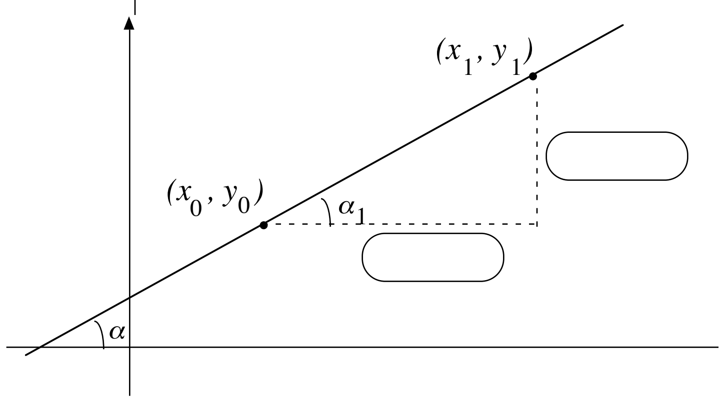
El ejemplo tratado tiene la ventaja de que facilita la aparición del "buen triángulo". Además de ello es útil cuando en la siguiente escena se sustituyan los números por las letras. Para así obtener la fórmula para el a. Este proceso de sustitución es importante porque permite "ver", a la mayoría de los alumnos, una génesis de la fórmula. Esto se hace en la página 6-9.

Observe que en el dibujo no se ha puesto $b =$. Conviene concentrarse primero sobre el a.

ESCENA 10

Pizarra





$$a = Tang(\alpha) = Tang(\alpha_1) = \frac{\qquad}{\qquad} =$$

Libro : 6-9

Actividad (Pupitre, 2 minutos)

Completar debidamente las figuras y la fórmula.

Con ello se desea establecer la fórmula:

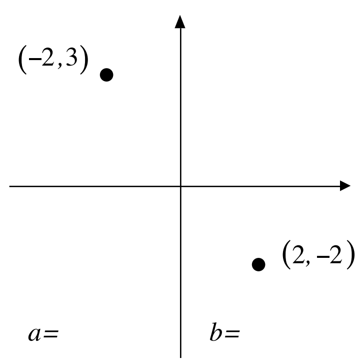
$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Comentario

Conviene recomendar que en los catetos del primer dibujo dejen expresada la longitud como diferencia de números. En el caso del cateto vertical sería $4-2$. Esto ayuda a que la completación de la siguiente figura pueda ilustrarse como un proceso de sustitución de los números por letras en la primera figura completada.

ESCENA 11

Pizarra



Libro : 6-10

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

Se trata de que apliquen la fórmula para calcular la pendiente.

Comentario

Suelen surgir preguntas sobre si importa cuál punto juega el papel de (x_o, y_o).

El cálculo de b se deja para la próxima clase.

ESCENA 12

Pizarra

$$ax^2 + bx + c = a\,(x + \overset{\frac{(\quad)}{2a}}{})^2 + c - \underset{a(\quad)^2}{}$$

Libro : 6-23

Actividad (Pizarra, pupitre 4 minutos)

Este algoritmo causa confusión en muchos estudiantes. Por ello es importante leerlo con ellos e interpretarlo. Hay que decir que lo que va en el espacio en blanco es el resultado de aplicar la tecla de la flecha a la expresión que está al comienzo de la flecha. Completar, de izquierda a derecha, el primer espacio y luego completar el segundo. Con esta explicación inicial la mayoría de los estudiantes captan el algoritmo. Luego conviene proponerles un polinomio de segundo grado, a coeficientes numéricos, para que le apliquen el algoritmo. Esta última actividad debe ser de pupitre.

Comentario

Existen varias formas de hablar de completación de cuadrados. A veces es bueno hablar de la noción de cuadrado "perfecto" para referirse al polinomio de segundo grado llamado "binomio de Newton".

A veces también es positivo pasar de la expresión de cuadrado completado (que llamamos forma vértice) a la forma canónica de polinomio de segundo grado (efectuando las operaciones de la forma vértice), para convencer al estudiante que efectivamente ambas expresiones son lo mismo. Hay de todas maneras que tener cuidado de hacer el producto o enunciar claramente "el cuadrado del primero más....." haciendo ver cuál es el primero, ..etc.

ESCENA 13

Pizarra

Buscar las expresiones "forma vértice" y "forma raíz" en las páginas 6-24 y 6-26.

Libro : 6-24 y 6-26

Actividad (Pupitre 2 minutos)

Conseguir las expresiones y tratar de entender qué significan.

Comentario

Se ha notado que a los estudiantes les cuesta tomar en cuenta las "formas" vértice y raíz. Esta actividad tiene por finalidad inducirlos a que le den cierta importancia. Po ello se les pide que busquen las expresiones "forma vértice" y "forma raíz" en las páginas 6-24 y 6-26. Luego se les puede pedir que observen en qué consisten esas dos formas. Cuántas formas hay? etc.

FASE FINAL

ESCENA 14

Pizarra

Ejemplos de polinomios de segundo grado en diferentes formas.

Libro : no figura en MG

Actividad (Pizarra 2 minutos)

Escribir algunos polinomios de segundo grado en diferentes formas.

Pedir a los alumnos identificar cada una de las formas. (Cuáles son vértice, cuáles raíz y cuales forma polinomio de segundo grado).

Comentario

Esta actividad tiene el objetivo de reforzar las nociones de forma vértice, raíz o polinomio de segundo grado.

CLASE 13

VISION GLOBAL

Con esta clase se cubre casi todo lo que falta del Capítulo 6.

> A la parte de hipérbolas se le dedica poco. Esto no es grave, porque en el próximo capítulo (el de inecuaciones) muchos de los ejercicios tienen que ver con la graficación de hipérbolas. Además, para la mayoría de los estudiantes este tema es relativamente fácil.

FASE INICIAL

ESCENA 1

Pizarra

Dudas

Libro : Capítulo 6

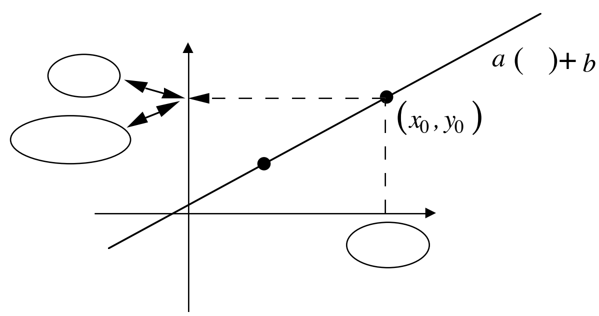
Actividad (10 minutos, pizarra, pupitre o consulta individual)

Comentario

FASE MEDIA

ESCENA 2

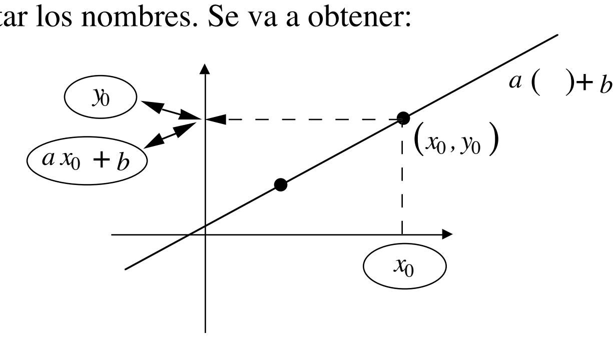
Pizarra



Libro : 6-9 y 6-10

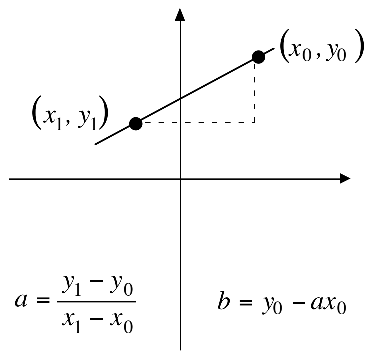
Actividad (Pizarra, 3 minutos)

La idea de esta actividad es iniciar el estudio del cálculo de b . Conviene plantear gráficamente la igualdad $y_o = ax_o + b$. (Utilizando caminos). Con la figura anterior se puede preguntar a los estudiantes de completar los nombres. Se va a obtener:



Se ve que el mismo punto del eje y tiene dos nombres: uno que se obtiene aplicando caminos y el otro por la ordenada del punto (x_o, y_o). Como los dos nombres designan el mismo punto se puede establecer la igualdad entre ellos $y_o = ax_o + b$ y con ello la ecuación. Este es un paso fundamental.

Luego se despeja b y se obtiene $b = y_o - ax_o$. Referir al estudiante a la Página 6-10 para que analicen el cuadro:



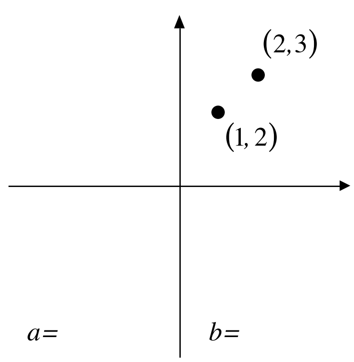
y constaten que se ha obtenido la misma fórmula para b.

Comentario

Esta actividad de deducción de una fórmula (al igual que la de a en la clase pasada) es importante como vivencia para los estudiantes.

ESCENA 3

Pizarra



Libro : 6-10

Actividad (pupitre, 3 minutos)

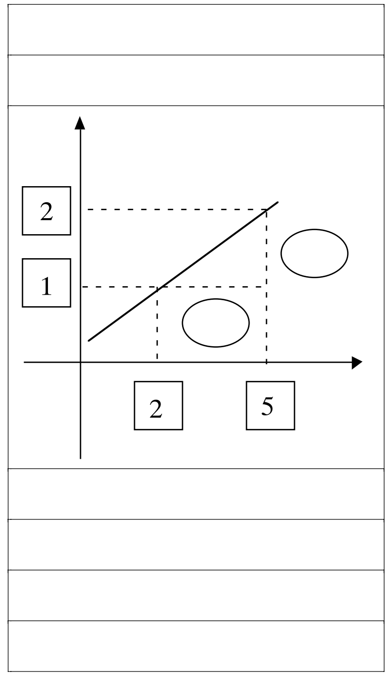
Hallar los valores de a y b.

Comentario

La finalidad de esta actividad es asegurar que entiendan la aplicación de las dos fórmulas. que sirven para calcular a y b. A veces hay dudas en quién debería jugar el papel de (x_o, y_o). Se les puede sugerir que lo hagan de las dos posibles maneras a ver si da diferente.

ESCENA 4

Pizarra



Libro : 6-12

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

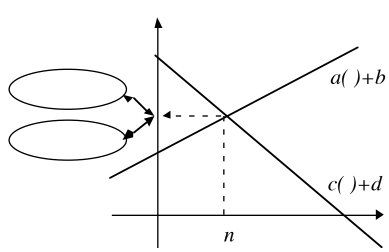
Explicar cómo se hace este ejercicio. Hay que hacer referencia a los dos cuadros anteriores, que aparecen en el libro, pero que probablemente es muy complicado poner en la pizarra.

Comentario

Como lo indica el título de la página, esta actividad tiene por objeto enseñar al estudiante que se puede obtener la fórmula de la recta de manera directa a partir de la pendiente y un punto por donde ella pasa. Esta manera de obtener la fórmula es la que se utiliza cuando se quiere calcular la fórmula de la tangente a una curva con la derivada. Y también es importante porque es la forma del polinomio de Taylor de grado 1.

ESCENA 5

Pizarra



Libro : 6-13

Actividad (Pizarra, 2 minutos)

Hallar la fórmula de la abcisa del corte de dos rectas.

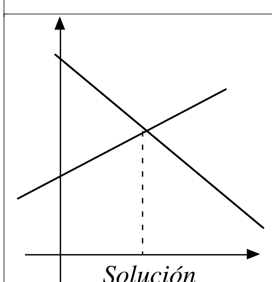
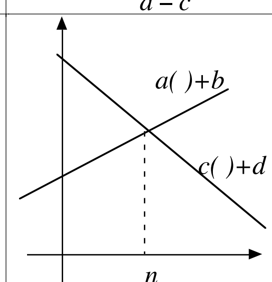
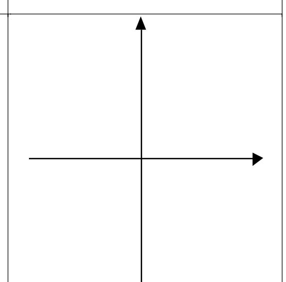
Comentario

Esta actividad es similar a la de la búsqueda de la fórmula de b. Un punto tiene dos nombres. etc.

La noción de corte de dos gráficas de funciones y su resolución algebraica es muy general. En este caso se hace para el caso muy particular en que las gráficas son rectas. Los caminos permiten plantear una "génesis" de la ecuación que resuelve el problema. Mostrar de dónde sale la ecuación. A pesar de que pareciera que la explicación es totalmente transparente, el mecanismo de igualar diferentes nombres de un mismo objeto y así establecer una ecuación no es natural para los alumnos. (Descartes es el que habla explícitamente de ese mecanismo).

ESCENA 6

Pizarra

Fórmula o nombre de Recta 1	Fórmula o nombre de Recta 2	$a(\quad)+b$	$c(\quad)+d$	$(\ )+1 \qquad 2(\quad)+1$
Ecuación		$a(n)+b=c(n)+d$		
Solución		$n=\dfrac{d-b}{a-c}$		
				
Punto de corte		$(n, an+b)$		

Libro : 6-14

Actividad (Pizarra, pupitre, 5 minutos)

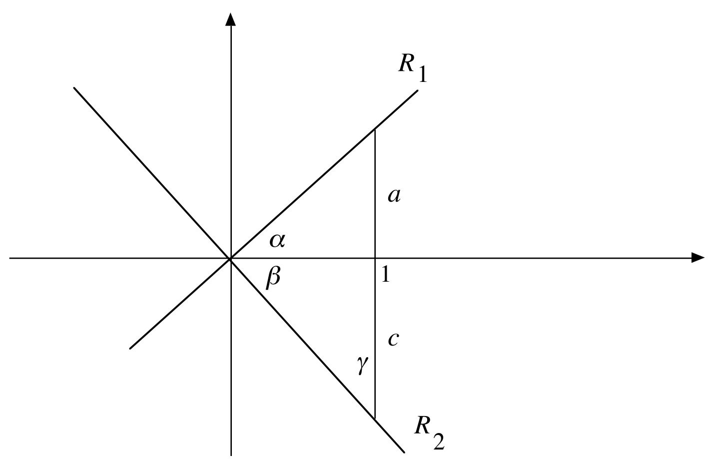
Explicar la actividad y los objetos que aparecen en la forma. Dejar que los estudiantes hagan un ejercicio en sus pupitres.

Comentario

Es probable que sea un poco largo poner toda la figura en el pizarrón.
Esta actividad tiene por objeto utilizar el resultado de la actividad anterior, que sólo permitía calcular la abcisa del punto de corte. A estas alturas todavía no es automático para los alumnos el calcular la altura de un punto de una curva dadas su abcisa y su fórmula. Todavía no han captado que basta con sustituir la letra que designa variable por el valor dónde se quiere calcular la altura. O, en nuestra notación, poner el valor entre los paréntesis, "en el algo".
Algunos de los ejercicios de la serie no tienen solución por ser paralelas las rectas. Otros se pueden completar de infinitas maneras diferentes. Hay otro inclusive en el cual el punto de corte no pertenece a una de las dos rectas. Todos esos casos patológicos están puestos para que el alumno reflexione y madure la relación algebra- gráfica.

ESCENA 7

Pizarra



Libro : 6-16

Actividad (Pizarra, 5 minutos)

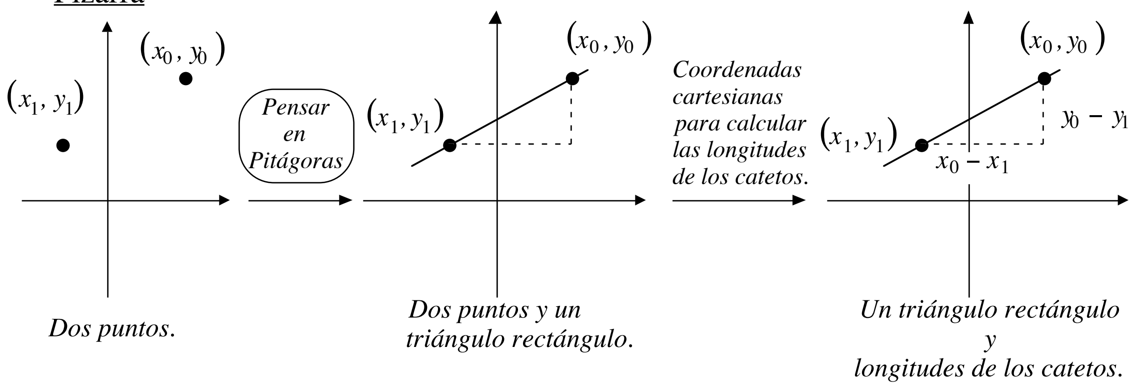
Explicar la relación entre las dos pendientes. Esta actividad es casi una actividad de ayuda de lectura.

Comentario

El punto delicado es hacer aparecer el signo menos. Una posible justificación es tomando en cuenta que si no se pone quedaría un número negativo igual a un número positivo. Para evitar esto se pone el menos. El problema surge del hecho de que no es lo mismo la tangente en triángulos (ya que el ángulo, en un triángulo rectángulo, nunca pasa de noventa grados) que la tangente en el círculo trigonométrico, donde el ángulo puede ser cualquier número y la extensión de la "función tangente" a esos ángulos tiene imágenes negativas.

ESCENA 8

Pizarra



Libro : 6-17

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

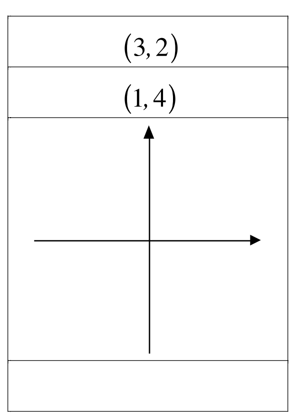
Ayudar a leer la página a los estudiantes.

Comentario

Esta es una actividad relativamente fácil. Pero es importante que entiendan que la fórmula de la distancia no es mas que una aplicación del Teorema de Pitágoras. Se trata de ver al segmento que une dos puntos como la hipotenusa de un triángulo, para el cuál, las longitudes de los catetos son fácilmente calculables a partir de las coordenadas de los puntos.

ESCENA 9

Pizarra



Libro : 6-17

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

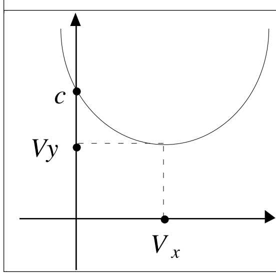
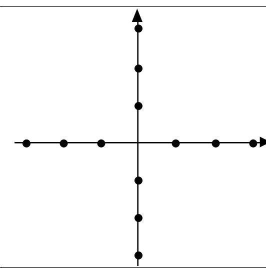
Hallar la distancia entre los dos puntos.

Comentario

Este es un ejercicio de mera aplicación de la fórmula obtenida en la actividad anterior.

ESCENA 10

Pizarra

$y = ax^2 + bx + c$	$y = 2x^2 - 3x - 2$
$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$	
$a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + V_y$	
$\left(V_x, V_y\right)$	
	

Libro : 6-24

Actividad (Pizarra, pupitre, 5 minutos)

Recordar la clase pasada, la noción de forma vértice y el algoritmo

$$ax^2 + bx + c = a\,(x + \overset{\frac{(\quad)}{2a}}{\quad}\;)^2 + c - \underset{a\,(\quad)^2}{\quad}$$

Dar las coordenadas del vértice:

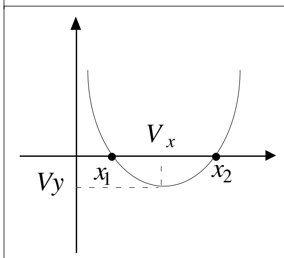
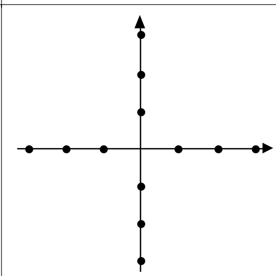
$$V_x = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad V_y = c - \frac{b^2}{4a}$$

Insistir en por qué esa "forma" se llama forma vértice.

<u>Comentario</u>

ESCENA 11

<u>Pizarra</u>

$ax^2 + bx + c$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$	$3(x-1)(x-2)$
x_1, x_2	
$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, V_y\right)$	
	

<u>Libro : 6-27</u>

<u>Actividad (Pizarra, pupitre, 5 minutos)</u>

Recordar cómo se calculan las raíces de un polinomio de segundo grado. Señalar que sus valores corresponden a los puntos de corte de la parábola con el eje x. Señalar qué significa algebraicamente el hecho de que no existan puntos de corte.

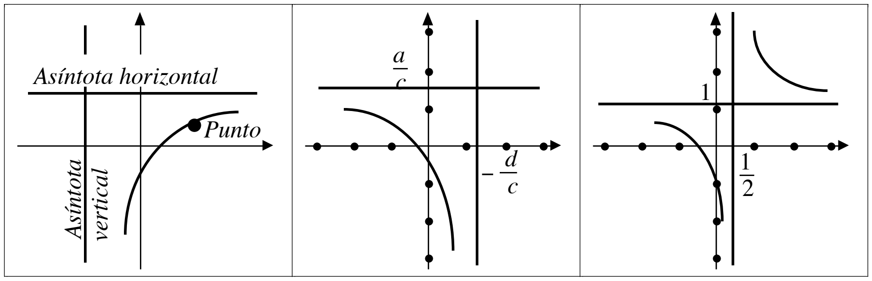
Insistir en por qué esa "forma" se llama forma raíz.

<u>Comentario</u>

ESCENA 12

<u>Pizarra</u>

Fórmula 1	Fórmula 2	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{a}{c} + r \cdot \frac{1}{cx+d}$	$\frac{2x+1}{2x-1}$	$1 + 2\frac{1}{2x-1}$
Asíntota horizontal		$\frac{a}{c}$		1	
Asíntota vertical		$-\frac{d}{c}$		$\frac{1}{2}$	
Punto por donde pasa		$\left(n, \frac{an+b}{cn+d}\right)$		$(0,-1)$	



<u>Libro : 6-31</u>

<u>Actividad (Pizarra, 5 minutos)</u>

Se trata de mostrar al estudiante cómo graficar rápidamente una hipérbola.

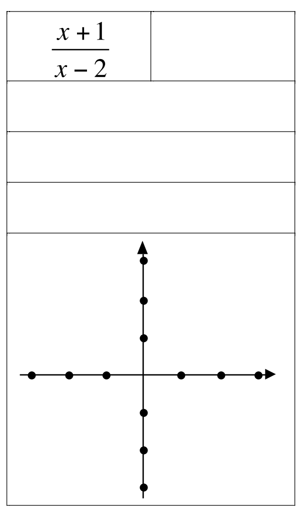
<u>Comentario</u>

Esta actividad es relativamente fácil. Las justificaciones utilizando la división de polinomios asustan a los estudiantes : creen que si se les pide graficar una hipérbola en un examen les van a exigir hacer todo ese procedimiento. Conviene hacer la justificación en la próxima clase, como actividad de la fase inicial.

FASE FINAL

ESCENA 13

<u>Pizarra</u>



<u>Libro : 6-31</u>

<u>Actividad (Pupitre, 3 minutos)</u>

Ejercicio para fijar las ideas básicas sobre la gráfica de la hipérbola.

Comentario

OJO! Se ha dejado la parte de problemas con rectas y con letras (6-18 a 6-21) para ser cubierto en la clase que sigue (14), porque es mejor dar tiempo al estudiante que vaya asimilando la primera parte de rectas.

CLASE 14

VISION GLOBAL

Esta clase está a caballo entre el Capítulo 6 y el Capítulo 7.

Del Capítulo 6 cubre unos ejercicios "integradores" del tema de recta. Ejercicios donde el estudiante tiene la oportunidad de organizar los conceptos adquiridos en el tema con miras a contestar ciertas preguntas.

Del Capítulo 7 se cubre esencialmente la parte algorítmica básica de la resolución de inecuaciones en una variable. El tema de inecuaciones, situado a estas alturas del curso es muy útil para el estudiante. Pone en juego buena parte de lo aprendido hasta ahora en el curso. Es un tema relativamente fácil para el estudiante. Para un análisis didáctico del tema, puede consultar [1] o [2].

FASE INICIAL

ESCENA 1

Pizarra

Graficar $\dfrac{3x-2}{2x+1}$ y $\dfrac{-\frac{7}{2}}{2x+1}$

Libro : Capítulo 6

Actividad (15 minutos, pupitre, pizarra)

Ayudar a que hagan esos gráficos (recordar, en caso de necesidad, cómo se calcula la asíntota horizontal y la asíntota vertical). Cuando vea que la mayoría logró hacer los gráficos les puede decir que lo que se quiere que sepan de hipérbola es justamente lo que han sido capaces de hacer. Pero que ahora usted va a explicar las fórmulas de las asíntotas (para los que les interesa ir un poco más allá de lo mecánico o de la receta).

Después, en la pizarra , haciendo la división de dos polinomios muestre cómo se transforma $\dfrac{3x-2}{2x+1}$ en $\dfrac{3}{2}+\dfrac{-\frac{7}{2}}{2x+1}$. Y haga notar la coincidencia entre el primer sumando (que es $\dfrac{3}{2}$) con el valor calculado para la asíntota horizontal. Haga notar que el segundo sumando es justamente la segunda hipérbola que se pidió graficar. En ese segundo gráfico es fácil ver porqué la asíntota vertical pasa por $x=-\dfrac{1}{2}$ (es el punto de corte de la recta dada por $2x+1$ con el eje x). Haga notar que para pasar del gráfico de $\dfrac{-\frac{7}{2}}{2x+1}$ al de $\dfrac{3x-2}{2x+1}$ lo que hay que hacer es desplazar verticalmente el gráfico de $\dfrac{-\frac{7}{2}}{2x+1}$ tres medios de unidad hacia arriba (porque $\dfrac{3x-2}{2x+1}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{-\frac{7}{2}}{2x+1}$). Esto ayuda a ver porqué $\dfrac{3}{2}$ es la asíntota horizontal de $\dfrac{3x-2}{2x+1}$.

Ahora puede rehacer el proceso hecho con $\dfrac{3x-2}{2x+1}$ con $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, para pasar a $\dfrac{a}{c}+r\cdot\dfrac{1}{cx+d}$.

Comparando luego $\dfrac{a}{c}+r\cdot\dfrac{1}{cx+d}$ y $\dfrac{3}{2}+\dfrac{-\frac{7}{2}}{2x+1}$ puede hacer ver porqué $\dfrac{a}{c}$ es la fórmula de la asíntota horizontal.

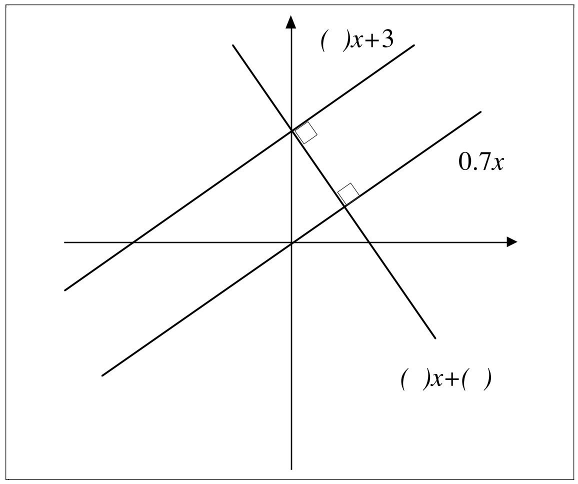
A veces es conveniente partir de la forma $\dfrac{a}{c}+r\cdot\dfrac{1}{cx+d}$ y realizando las operaciones llegar a $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Comentario

FASE MEDIA

ESCENA 2

Pizarra



Libro : 6-18

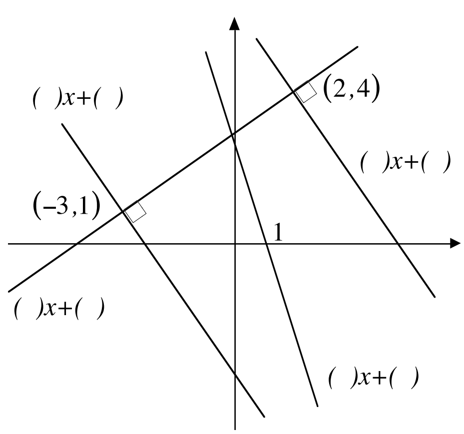
Actividad (Pizarra, 3 minutos)

Comentario

La actividad tiene por objetivo sensibilizar al estudiante en la resolución de este tipo de problemas. Se debería ir resolviendo el problema en la pizarra, pero acompañado de las respuestas que den los estudiantes a las preguntas que sobre el problema, hace el profesor. Esto da oportunidad de recordar los hechos útiles, para la resolución, que se han dado en las dos clases anteriores.

ESCENA 3

Pizarra



Libro : 6-18

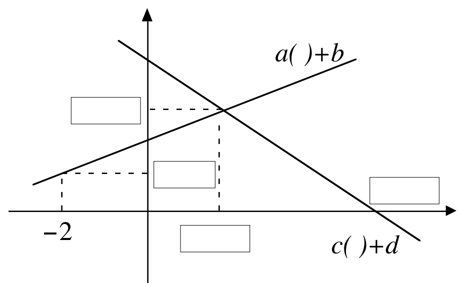
Actividad (Pupitre, 8 minutos)

Comentario

En esta actividad el estudiante debería enfrentarse a la resolución del problema.

ESCENA 4

Pizarra



Libro : 6-21

Actividad (Pizarra, pupitre, 5 minutos)

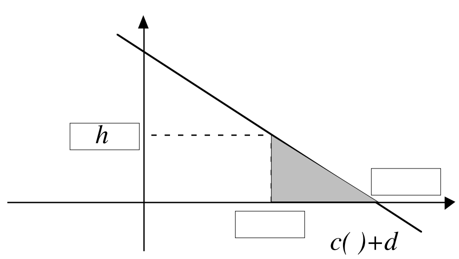
Mostrar al alumno lo que se quiere decir con calcular con letras.

Comentario

Los alumnos tienen muy poca costumbre de trabajar con letras. Estos ejercicios son muy fáciles pero sirven para iniciar a numerosos estudiantes en el uso de letras para la construcción de expresiones.

ESCENA 5

Pizarra



Area del triángulo sombreado=

Libro : 6-21

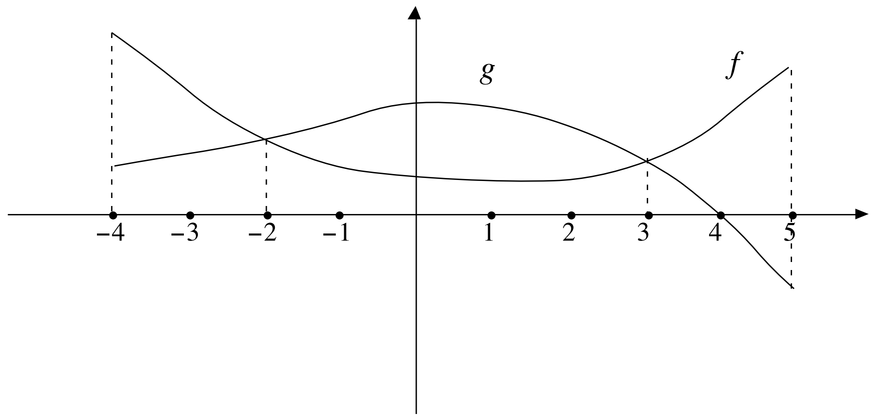
Actividad (Pupitre, 5 minutos)

Comentario

Esta actividad tiene por objeto reforzar la actividad anterior. Ella, como las anteriores de la clase exige refrescar los resultados expuestos en las dos clases pasadas.

ESCENA 6

Pizarra



TRES POSIBILIDADES PARA UN x.

1- La altura de f en x es **mayor** que la altura de g en x.	$f(x) > g(x)$
2- La altura de f en x es **menor** que la altura de g en x.	$f(x) < g(x)$
3- La altura de f en x es **igual** que la altura de g en x.	$f(x) = g(x)$

LA GRAN PREGUNTA : ¿Donde se cumplen cada una de las tres posibilidades?

Libro : 7-1

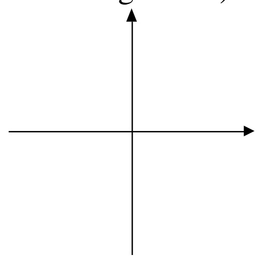
Actividad (Pizarra, 3 minutos)

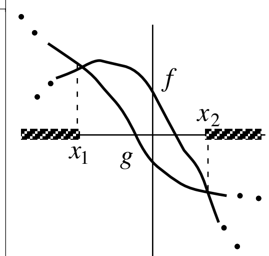
Comentario

Esta actividad no es esencial. Los alumnos podrían hacerlo por ellos mismos. Pero es útil para entender o al menos motivar el problema de la resolución de inecuaciones.

ESCENA 7

Pizarra

Desigualdad que define la inecuación	Gráficos. (de las fórmulas de la desigualdad)
Ecuación (con las fórmulas de la desigualdad)	
Solución de la ecuación (puntos de corte)	Solución de la inecuación

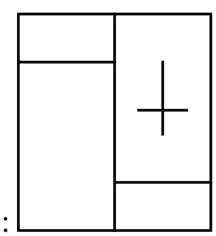
$f(x) < g(x)$	
$f(x) = g(x)$	
x_1 y x_2	$(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

Libro : 7-2

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

Lectura, compartida con los alumnos, de ambos cuadros.

Comentario

La "forma" de la actividad que se inicia es : 

Al igual que en la página 3-10, la presentación del algoritmo de resolución de inecuaciones en una variable utiliza dos formas idénticas, pero completadas con dos tipos de lenguaje : castellano y "simbólico". Se trata de ayudar a los estudiantes en la lectura de esta presentación. Siempre hay que comparar los cuadros homólogos, haciendo ver que en ellos están los mismos objetos pero en lenguajes diferentes.

Para el profesor es evidente la estrecha relación entre los cuadros de una misma forma y la significación de cada uno de los contenidos de las partes para la resolución del problema. Para el alumno no es evidente. Por ello hay que asegurarse que domine primeramente el algoritmo y luego a través de diferentes ejercicios vaya adquiriendo la "lógica" del algoritmo.

La forma facilita el aprendizaje del algoritmo al estudiante. Además, la realización de los ejercicios permite fijar mejor algunos contenidos del capítulo anterior.

El trabajo sobre la significación de lo que se hace es ulterior y sobre todo se logra con las actividades de completación inversa de la forma. Para este trabajo resultan útiles los ejercicios de las páginas 7-7 y 7-12.

ESCENA 8

Pizarra

$$x < -0.9x + 1$$

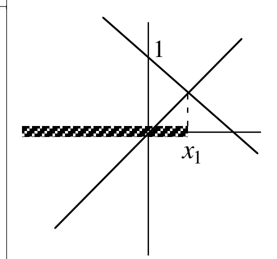
$$x = -0.9x + 1$$

$$x + 0.9x = 1$$

$$(1 + 0.9)x = 1$$

$$x = \frac{1}{1.9}$$

$$x_1 = 0.52$$



Libro : 7-2

Actividad (Pizarra, 2 minutos)

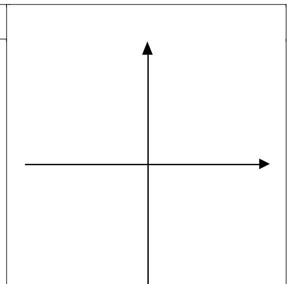
Comentario

La primera fase consiste en lograr aplicar de manera correcta las directrices de completación de la forma (el algoritmo). La actividad de hacer un ejemplo en la pizarra es para acelerar ese proceso. Se ha escogido en el ejemplo particular unos coefientes con decimales para que la resolución de la ecuación sea necesaria para resolver el ejercicio.

ESCENA 9

Pizarra

$$x < -x + 1$$



Libro : 7-2

Actividad (Pupitre, 5 minutos)

Completar la forma de acuerdo a las indicaciones que se han expuesto.

Comentario

Esta actividad es esencial para continuar la clase. La situación es la siguiente: a pesar de lo claro que pueden ser las dos actividades anteriores sólo un pequeño número de alumnos han "entendido". El problema no es de inteligencia, sino de que están entrenados a no procesar lo que oyen: a no escuchar. Miran al profesor o a la profesora. Ven algunos objetos conocidos en el discurso. Pero no actúan tratando de hacerse una idea de la finalidad de las acciones del profesor en la pizarra. En general esperan que esa idea se tenga al estudiar los apuntes en la casa o cuando un amigo, familiar o inclusive profesor particular se lo "explique". El plantear la resolución inmediata del ejercicio rompe ese esquema. El alumno no tiene la oportunidad de acudir a terceros, fuera y después de la clase, para iniciar ese trabajo. Pero la ruptura que impone el profesor no necesariamente lleva a la reacción deseada. Las reacciones van a ser varias. Están los que se van a perder en el anonimato, no hacen nada y generalmente perturban la clase hablando o riendo entre ellos. Están los que mantienen la actitud de que no pueden entender y entonces tratan de copiarse de otros: se "recuestan". Finalmente están los que enfrentan la tarea.

Hay una componente, a lo largo de todo el curso de Método de Graficación, de ir modificando esa situación. Por modificar se entiende que las proporciones de las reacciones vayan tendiendo hacia lo que se esperaría que produjera la ruptura : que la mayoría de los estudiantes trabaje el ejercicio y más aún, que la mayoría de los estudiantes intente escuchar realmente al profesor.

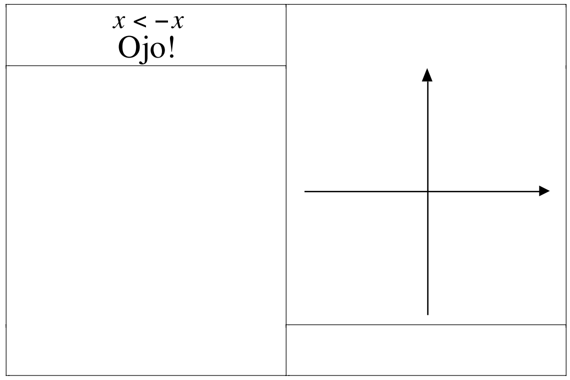
Se cree que un mecanismo básico para esto es dar sistemáticamente (a lo largo del curso), explicaciones y directrices muy relacionada con la actividad que se va a pedir que hagan los estudiantes, inmediatamente después. (Como se está haciendo en este caso con las actividades de las escenas 6, 7 y 8).

Pero el profesor es esencial en esta estrategia: él, al circular entre los pupitres puede romper los grupos que "esperan" que termine la actividad. Ayudar a los que se recuestan para que vayan descubriendo que ellos también pueden. Finalmente incentivar a los que trabajan (que ya han superado la actitud de no escuchar) a que hagan más ejercicios que los pedidos. Esto en particular tiene como consecuencia que los que se van a recostar consigan menos personas en quien recostarse. Este trabajo de modificación de actitud es fundamental para que los estudiantes se puedan incorporar realmente a una clase (de cualquier materia).

Si pide hacer el ejercicio que sigue, es probable que constate que un buen número de estudiantes tienen problemas para resolver la ecuación $x^2 = x$.

ESCENA 10

Pizarra



Libro : 7-4

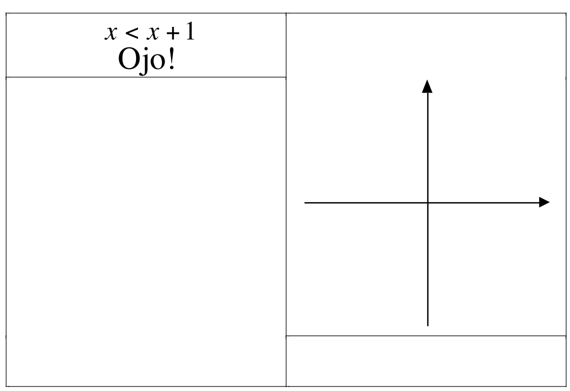
Actividad (Pupitre, 3 minutos)

Comentario

Esta actividad no tiene, desde el punto de vista de las inecuaciones, nada particular. Para un buen número de estudiantes: los que creen que $-x$ es negativo porque tiene un signo menos por delante, la respuesta que intuitivamente deberían dar al ejercicio es el vacío: "nunca x es menor que $-x$". Se ha notado que no reaccionan de esa manera. Probablemente se deba a que no están acostumbrados a analizar las expresiones para sacar conclusiones al respecto. Por ello en general proceden haciendo el ejercicio como cualquier otro. Más "chocante" es el ejercicio $-x > 0$. Trate de observar si hay algunos que "no aceptan esa afirmación".

ESCENA 11

Pizarra



Libro : 7-3

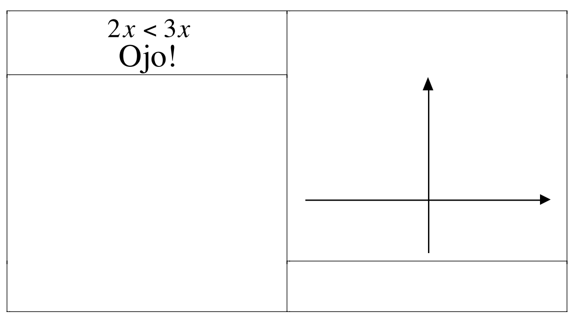
Actividad (Pupitre, 3 minutos)

Comentario

Nuevamente, esta actividad pareciera una repetición de lo anterior. Sin embargo, su finalidad es hacer comprender qué es lo que sucede cuando en una ecuación se llega a algo que no es verdadero. En esta actividad, al resolver la ecuación $x = x + 1$ se va a llegar a que $0 = 1$. Nótese que al hacer el gráfico de ambas curvas (que es un requerimiento de la actividad) el alumno debe considerar lo que está en el dibujo para poder dar la solución de la inecuación. Es decir, la actividad, independientemente de la solución de la ecuación, exige que ella sea interpretada en el cuadro gráfico. No se trata de poner una ecuación problemática y sugerir al estudiante acudir al gráfico para interpretar lo que pasa : el gráfico está presente por exigencias de la resolución de la inecuación. Es parte del "medio" en ese momento. El procedimiento sugerido en el capítulo, para resolver inecuaciones, tiene la propiedad de ofrecer al estudiante el cuadro gráfico y el algebraico simultáneamente. Esto es propicio para ayudar a reequilibrar el conocimiento del estudiante, cuando ciertas hechos inesperados suceden (como que $0 = 1$).

ESCENA 12

Pizarra



Libro : 7-3

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

Resolver la inecuación

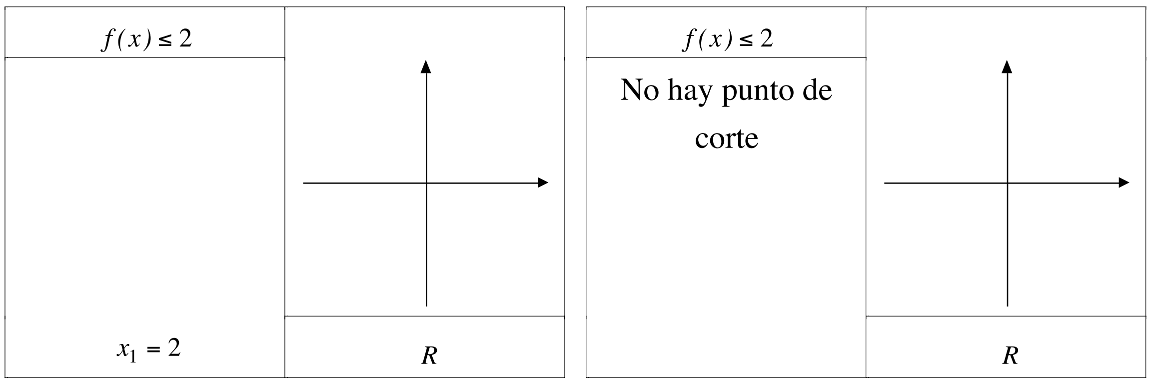
Comentario

Esta actividad es similar a la anterior. Se trata de hacer "chocar" al estudiante con el hecho de que no puede "tachar la x de lado y lado de la ecuación". Esto lo lleva a que $2 = 3$. Y no le da información sobre la solución. Sin embargo, de la información del cuadro gráfico es evidente que la solución es $x = 0$. Esto de nuevo es una situación de reequilibrio: el estudiante debe de algún modo compaginar dos hechos que parecen contradictorios entre sí. Es una ocasión para "aprender".

FASE FINAL

ESCENA 13

<u>Pizarra</u>



<u>Libro : 7-7</u>

<u>Actividad (Pupitre, 3 minutos)</u>

<u>Comentario</u>

Esta actividad tiene por objeto sacar al estudiante del aspecto puramente algorítmico y comenzar, con ejemplos "cualitativos" la completación inversa de la forma. Esto es útil, porque se ha notado que hay estudiantes que tienden a considerar sólo el aspecto algebraico del problema, hacen el gráfico, como parte de una exigencia del profesor, pero no lo utilizan para definir la solución de la ecuación. Esto permite errores en la respuesta, aunque la resolución de la ecuación sea correcta.

La situación planteada en esta actividad, impide el funcionamiento de esa actitud : no existe parte algebraica y por lo tanto para completarlas adecuadamente el estudiante debe interpretar la condición gráficamente.

CLASE 15

VISION GLOBAL

Esta clase desde el punto de vista del contenido tiene tres tipos de actividad.

Una es resolución de inecuaciones por métodos aproximados.

Otra de resolución de inecuaciones que están constituidas por expresiones con valor absoluto.

La actividad final es de problemas relacionados con las inecuaciones. Esos problemas pueden plantearse en términos de completación inversa de la forma.

FASE INICIAL

ESCENA 1

<u>Pizarra</u>

Dudas

<u>Libro : Capítulos 6 y 7</u>

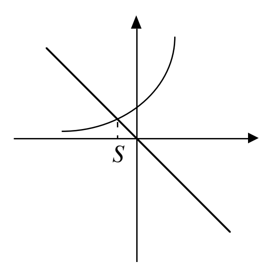
<u>Actividad (10 minutos, pizarra, pupitre o consulta individual)</u>

<u>Comentario</u>

FASE MEDIA

ESCENA 2

<u>Pizarra</u>

$e^x > -x$	
$e^x = -x$ La solución de esta ecuación no se puede obtener por despeje, ni por diagrama. Relea la página 3-20	

<u>Libro : 7-5</u>

<u>Actividad (Pizarra y pupitre, 10 minutos)</u>

Ayudar a completar parte de la tabla de la página 7-6. Hacer preguntas pertinentes que tienen que ver con el tema.

<u>Comentario</u>

La tabla de la página 7-6, puede parecer un poco complicada. Es precisa para orientar la búsqueda, pero creo que las tres últimas columnas confunden al estudiante. El ver que la longitud del intevalo que contiene a s tiende a cero no es necesario. Basta con ver que los diferentes x que se van seleccionando, se acercan a s.

El punto básico es que comprendan que es necesario analizar el gráfico para poder seleccionar el próximo x. Debe estar a la izquierda o a la derecha del anterior y sólo se sabe hacia dónde, si se analiza el gráfico y esto implica calcular las alturas de las dos curvas en el x anterior y compararlas para descubrir de qué lado del s está el x y así saber hacia dónde escoger el siguiente.

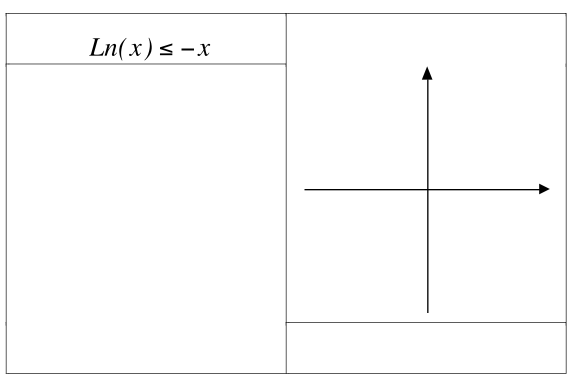
Esta actividad, que requiere de la calculadora, es muy útil para los estudiantes. Primeramente porque se ven, de manera natural, envueltos en un proceso donde se consideran números con bastantes decimales. Segundo la respuesta sólo se puede buscar interactuando estrechamente con el cuadro gráfico.

Tercero, la situación puede servir como ejemplo de que el hecho de que el despeje no funcione, no implica que no exista solución de la ecuación. Esta distinción es muy importante para seguir profundizando en el concepto de solución de ecuación. La situación obliga al tanteo y con ello a hacer ver el significado de la solución de una ecuación. El hecho de que esta discusión se de en el contexto de resolución de inecuaciones con gráficas, permite que el cuadro gráfico esté presente en el "medio", posibilitando la auto-orientación del estudiante.

El Teorema de Bolzano asegura que la búsqueda va a conducir a un número. El dibujo hace que esa verdad sea evidente y por lo tanto le quita "sentido" al teorema. Por ello no conviene plantear, en este momento, el teorema a los estudiantes.

ESCENA 3

Pizarra



Libro : 7-6

Actividad (Pupitre, 5 minutos)

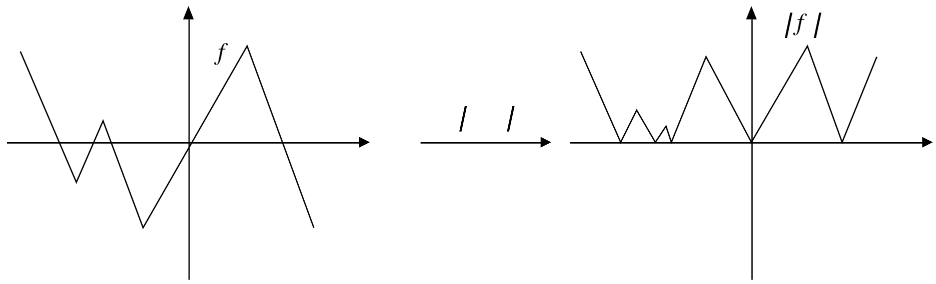
Hacer el ejercicio.

Comentario

De nuevo la exigencia: teoría, aplicación inmediata. (Para generar cambios de actitud).

ESCENA 4

Pizarra



Libro : 7-8

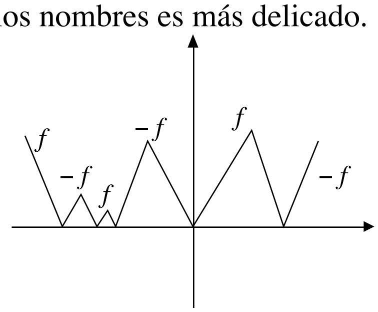
Actividad (Pizarra, 3 minutos)

Comentar la figura. Justificarla.

Comentario

Existen dos cosas que los estudiantes deben aprender: la primera es hacer el gráfico del valor absoluto de una función. La segunda es ponerle nombres que no contengan $|\quad|$ a cada uno de los pedazos de la curva $|f(\ )|$. La primera es fácil de aprender (aunque luego confunden el gráfico de $|f(\ )|$ con el de $f(|\quad|)$).

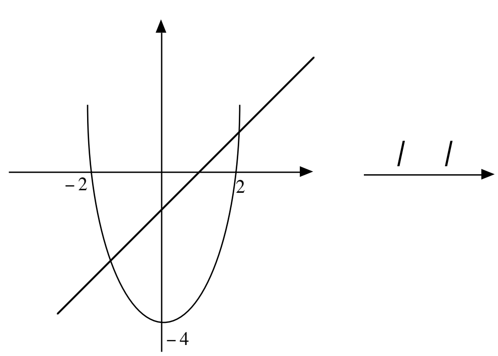
El segundo aspecto: el de poner los nombres es más delicado.



Conviene que se hagan varios ejemplos con rectas y con parábolas.

ESCENA 5

Pizarra

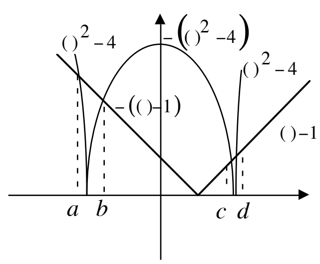


Libro : 7-9

Actividad (Pupitre, 3 minutos)
Se les pide a los estudiantes, además de graficar el "valor absoluto de las gráficas", dar el nombre de cada uno de los pedazos.

Comentario

ESCENA 6
Pizarra



Libro : 7-9

Actividad (Pizarra, 5 minutos)
En esta actividad se debe retomar lo que han debido hacer los estudiantes, en la actividad anterior y utilizarlo para hallar las ecuaciones que deben satisfacer los valores que corresponden a las letras del eje x.

Comentario

La ecuación para hallar la abcisa de un punto de corte, al igualar valores absolutos, no es despejable. Usualmente se recurre a la aplicación de la definición del valor absoluto para obtener otra ecuación, en la cual el valor absoluto no está presente y por lo tanto es despejable. Este procedimiento suele ser mal comprendido por el alumno. Como tal, se vuelve otra receta.
El disponer las gráficas y el hecho de que la curva simétrica con respecto al eje x de una curva de nombre f, tiene nombre $-f$, permite "construir" la ecuación equivalente (que sale de la definición del valor absoluto) pero a partir del análisis directo del gráfico. Esta manera de proceder va más en el espíritu del texto y resulta más clara para los estudiantes.

Es conveniente plantear las ecuaciones utilizando, para la incógnita, la misma letra del eje. Con el objeto de enfatizar que la ecuación tiene que ver con el valor desconocido de esa letra.

Cada ecuación tendrá dos soluciones. Conviene hacer las cuatro y ver que son equivalentes dos a dos. Además, es conveniente en cada caso preguntar a los estudiantes cuál es la otra solución.

ESCENA 7

Pizarra

Hallar la solución de la inecuación definida por $\left|x^2 - 4\right| < |x - 1|$.

Libro : 7-9

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

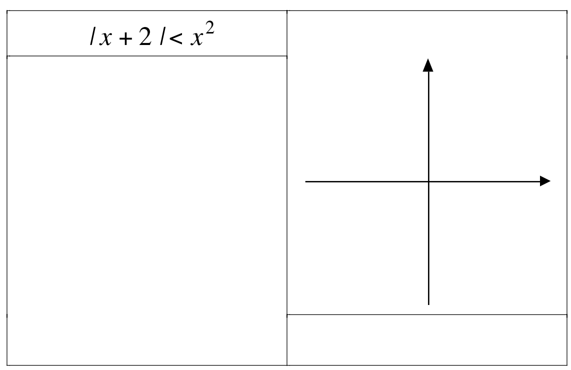
Resolver la inecuación.

Comentario

Conviene no haber borrado parte de los resultados obtenidos en las dos actividades anteriores. Se trata de mostrar que dichas actividades son parte de la resolución de $\left|x^2 - 4\right| < |x - 1|$.

ESCENA 8

Pizarra



Libro : 7-10

Actividad (Pupitre, 8 minutos)

Resolver la inecuación definida por $/ x + 2 /< x^2$.

Comentario

Esta actividad es para fijar lo visto en las tres actividades anteriores.

ESCENA 9

Pizarra

1- Determine a de manera que la inecuación $ax + 2 < x^2$ tenga por solución $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$.

Libro : 7-12

Actividad (Pupitre, 8 minutos)

Comentario

Con esta actividad se inicia la tercera parte del contenido a ser cubierto en esta clase. Estos ejercicios son actividades de inversión de la forma.

Esta actividad es importante hacerla en pupitre. Conviene sugerirles que hagan un dibujo. Algunos estudiantes que ya han visto el tema en otros cursos tienen la idea de plantear una ecuación. Pero los estudiantes que no tienen esa preparación adicional rara vez se les ocurre esa idea. Para ellos es más natural resolver el ejercicio a través de un análisis del dibujo de las dos curvas .

Se le asigna ocho minutos a esta actividad porque es fundamental. Surgirán varias maneras de hallar la solución del ejercicio. En general todas son aceptables.

ESCENA 10

Pizarra

2- Determine a y b de manera que la solución de $ax + b \geq x^2 - 1$ sea $[1, 4]$.

Libro : 7-12 .

Actividad (Pupitre, 8 minutos)

Hacer el ejercicio.

Comentario

FASE FINAL

ESCENA 11

Pizarra

Libro : 7-12

Actividad (minutos restantes, pupitre)

Trabajar problemas de la página 7-12

Comentario

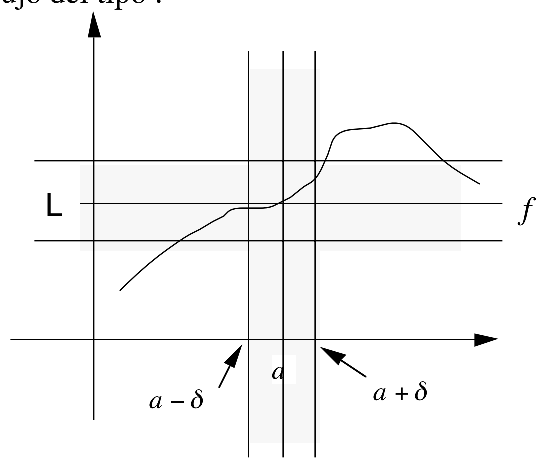
CLASE 16

VISION GLOBAL

El objetivo de esta clase es el de introducir las nociones de ecuación e inecuación en dos variables.

Por razones probablemente históricas coexisten en los curso habituales de cálculo en una variable, nociones de tipo funcional, que son el objeto principal de MG y nociones que se aparentan más con la geometría diferencial. Desde el punto de vista algebraico ambos mundos son muy diferentes. En un caso se trabaja con una sola variable en el otro con dos o mas. Debido al hecho de que ambas notaciones algebraicas son utilizadas de manera libre en los textos es conveniente, para el alumno, conocer los rudimentos de la notación con dos variables. Y esta es la finalidad principal de esta clase.
Queremos mostrar con un par de ejemplos cómo, a nuestro entender, la diferencia entre ambas estructuras algebraicas, puede causar dificultades en el aprendizaje de los estudiantes.

En la definición de límite aparece a menudo, a manera de “explicación evidente” de la definición de límite un dibujo del tipo :



Los libros dan por sentado de que la interpretación gráfica de $|x-a|<\delta$ es una franja vertical como la que ilustra la figura . Esto lleva implícito la interpretación en el mundo de dos variables y no es evidente para el alumno. De hecho alguien que haya trabajado la primera parte del capítulo 7 interpreta gráficamente $|x-a|<\delta$ en la recta real como un intervalo.

El otro ejemplo es con la notación $y=f(x)$. Tomemos como ejemplo $y=x$. Todo el mundo dice : es la identidad. Y la representación gráfica es la bisectriz de los cuadrantes 1 y 3. Sin embargo, si somos un poco cuidadosos y tomamos en serio lo que vemos, en la expresión $y = x$ aparecen dos letras. Y la interpretación habitual de esas dos letras es la de variable. Por otro lado $y = x$ es equivalente a $x - y = 0$. Esto tiene la forma $g(x, y) = 0$. Y en este cuadro de funciones de dos variables la bisectriz aparece no como el gráfico de una función sino como la representación de la curva de nivel cero del plano dado por $x - y = z$.

La notación en varias variables es muy útil en el tema de integrales múltiples. Sin embargo, para adquirir las ideas de paso de cuadro simbólico a cuadro gráfico es suficiente trabajar en dimensión dos. Este es el objetivo de esta clase, que cubre la segunda parte del Capítulo 7 de MG.

La clase tiene esencialmente dos partes :

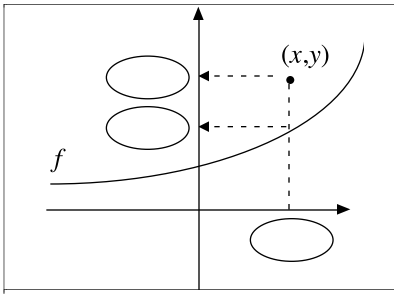
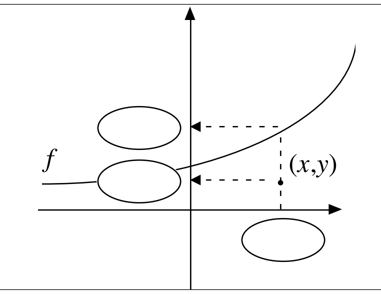
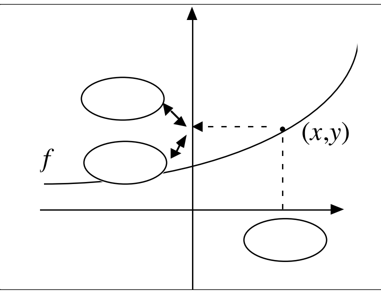
> La primera para entender cómo una fórmula puede ser utilizada para construir expresiones algebraicas cuya interpretación en el plano son regiones del plano.
> La segunda es el tratamiento de sistemas de ecuaciones lineales.

FASE INICIAL

ESCENA 1

<u>Pizarra</u>

Complete, las elipses con los nombres adecuados y las expresiones algebraicas con $>, <$ *o* $=$:

		
$y \quad f(x)$	$y \quad f(x)$	$y \quad f(x)$
(x,y) está ENCIMA de la curva f	(x,y) está DEBAJO de la curva f	(x,y) está SOBRE la curva f

<u>Libro : 7-14</u>

<u>Actividad (3 minutos, pizarra)</u>

<u>Comentario</u>

Esta actividad es fundamental para la comprensión de la interpretación en el plano de las expresiones simbólicas.

Es una situación en que las expresiones son generadas a partir del gráfico. Para ello se procede en dos etapas :

La primera es ponerle el nombre a los puntos finales (para ello sirven los caminos).

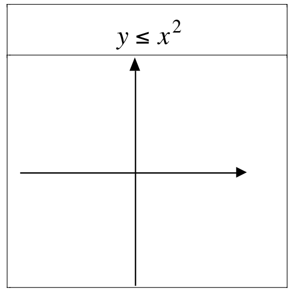
La segunda es tomar los nombres de los dos puntos del eje y, comparar sus alturas y de acuerdo a lo que se constate, construir la expresión correspondiente.

Es conveniente explicar la convención de la curva punteada, que aparece en las figuras al final de la página.

FASE MEDIA

ESCENA 2

Pizarra



Libro : 7-15

Actividad (3 minutos, pizarra)

Representar gráficamente la zona definida por la expresión $y \le x^2$.

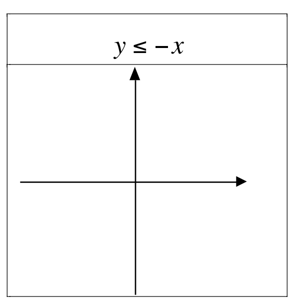
Comentario

Siempre hay que partir haciendo $y = f(x)$, en este caso es $y = x^2$. Y esto es en realidad el gráfico de $(\ )^2$. La curva divide al plano en dos regiones.

El siguiente paso es escoger la región formada por el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad. En caso de duda se puede probar con un punto de una de las dos regiones y ver si cumple la condición. En caso de que el punto no la cumpla, la región que satisface la condición es la otra región.

ESCENA 3

Pizarra



Libro : 7-15

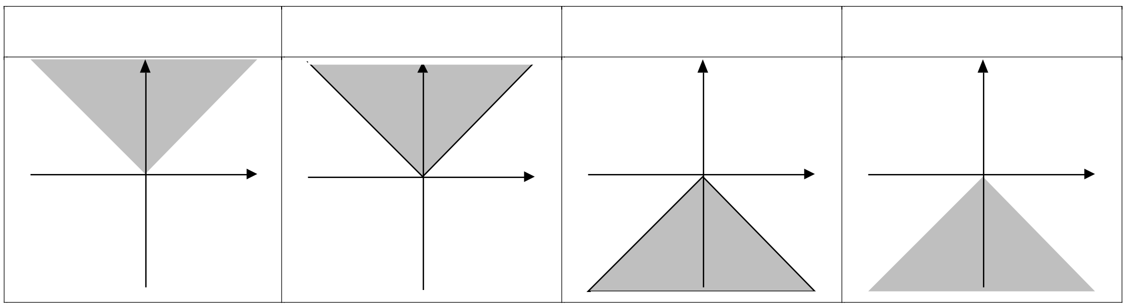
Actividad (3 minutos, pupitre)

Comentario

Este ejercicio es para asegurar que el alumno ha comprendido cómo definir la región dada por la condición.

ESCENA 4

Pizarra



Libro : 7-16

Actividad (3 minutos, pupitre)

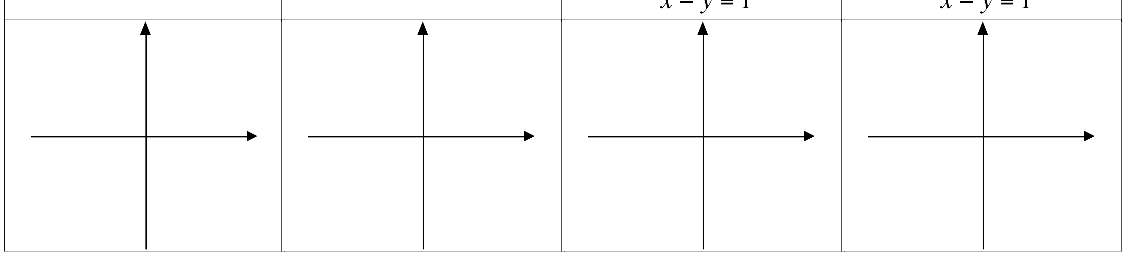
Comentario

Este es el ejrcicio inverso del anterior. Dada la región se debe encontrar la condición que la define.

ESCENA 5

Pizarra

$3x + 2y = 6$	$x - y = 1$	$\frac{3}{2}x + y = 3$ o $x - y = 1$	$\frac{3}{2}x + y = 3$ y $x - y = 1$



Libro : 7-18

Actividad (3 minutos, pupitre)

Comentario

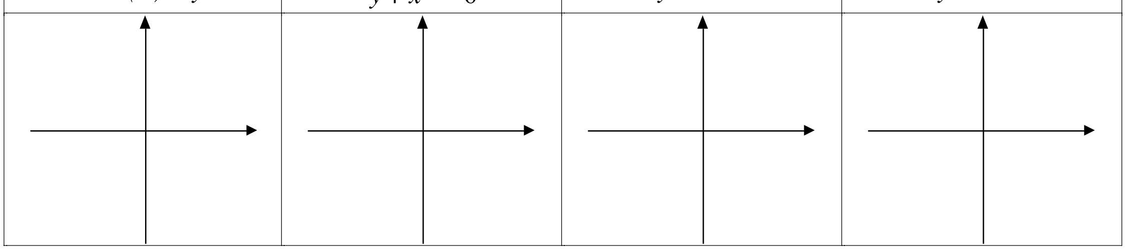
El objetivo de este ejercicio es el de ver la representación de la ecuación lineal (en dos variables) como una recta (en el plano). Para ello hay que cambiarle la forma, como es sugerido en el encabezado del ejercico en la página.

Los dos últimos ejercicios son importantes por el hecho de que involucran dos condiciones (ecuaciones) pero una con "o" y la otra con "y". La que tiene el "y" es la que suele llamarse "sistema de ecuaciones". Usualmente los conjuntos de ecuaciones aparecen sólo con ecuaciones sin el "y". Porque se sobreentiende que en un sistema se está pidiendo la conjunción de las condiciones algebraicas dadas por las ecuaciones.

ESCENA 6

Pizarra

$x \cdot y = 1$ $Sen(x) = y$	$x \cdot y = 1$ $y + x^2 = 0$	$x \cdot y = 1$ $y + x = 0$	$x \cdot y = 1$ $y - x = 0$



Libro : 7-18

Actividad (6 minutos, pizarra y pupitre)

Comentario

El objetivo de los ejercicios de estas dos páginas (7-18 7-19) es la de transmitir la idea fundamental :

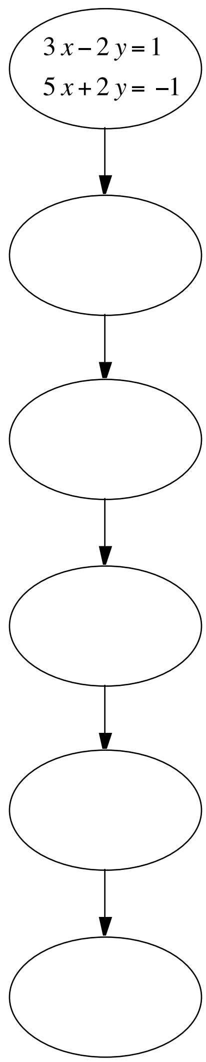
"la conjunción de condiciones algebraicas, se traduce en el plano cartesiano en intersección de las regiones definidas por esas condiciones".

Esta idea ya ha sido trabajada en las páginas anteriores pero con regiones que son más gruesas que curvas.

Se trabaja en muchos de los ejercicios con condiciones difícilmente manejables algebraicamente. Por ejemplo $\begin{matrix} x \cdot y = 1 \\ Sen(x) = y \end{matrix}$. Esto se hace con la intención de privilegiar al plano cartesiano para el análisis de la situación y dificultar el abordaje de la situación de manera puramente algebraica (y evitar que se vuelva una "sacadera de cuentas").
Conviene explicar en la pizarra el primer ejercicio de la serie.

ESCENA 7

<u>Pizarra</u>



<u>Libro : 7-20</u>

<u>Actividad (5 minutos, pizarra pupitre)</u>

Explicar la página. Primero hacerlo con el ejemplo numérico y luego mostrar el de las letras.

<u>Comentario</u>

Las actividades de las páginas 7-20 a 7-22 están pensadas para repasar lo que los alumnos deberían saber de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

ESCENA 8

Pizarra

$$\begin{aligned} y + x &= 0 \\ y - x &= 0 \end{aligned}$$

Libro : 7-21

Actividad (3 minutos, pupitre)

Resolver el sistema de ecuaciones planteado en la pizarra.

Comentario

Conviene en la medida de lo posible plantear algun sistema incompatible y otro indeterminado y en cada caso analizar la situación en el plano cartesiano. Esto se hace en las dos actividades que siguen.

ESCENA 9

Pizarra

$$\begin{aligned} y + x &= 1 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Libro : 7-21

Actividad (3 minutos, pupitre)

Resolver el sistema.

Comentario

Conviene, después que varios alumnos se topen con la dificultad algebraica inherente a la incompatibilidad del sistema, plantear el problema gráficamente.

ESCENA 10

Pizarra

$$\begin{aligned} y + x &= 1 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

Libro : 7-22

Actividad (3 minutos, pupitre)

Resolver el sistema.

Comentario

Conviene, después que varios alumnos se topen con la dificultad algebraica inherente a la indeterminación del sistema, plantear el problema gráficamente.

FASE FINAL

ESCENA 11

Pizarra

Se tienen 3200 Bs en 70 billetes. Los billetes son de 20Bs y 50Bs. ¿Cuantos billetes de cada clase hay?

Significado de las incógnitas	Soluciones
Planteamiento del sistema de ecuaciones.	Chequeo

Libro : 7-22

Actividad (3 minutos, pizarra)

Completar la forma de acuerdo al libro. (Acompañar al alumno en la lectura de la página)

Comentario

A partir de 7-22 hasta el final del capítulo, los ejercicios son actividades de formalización en términos algebraicos de situaciones planteadas en lenguaje coloquial.

En esa formalización hay dos etapas claramente identificables :

Fijación del significado de cada incógnita.

Planteamiento del problema en términos de sistemas de ecuaciones, tomando en cuenta el significado que se le ha asignado a cada una de las letras que representan incógnitas.

ESCENA 12

Pizarra

Calcular dos números cuya suma sea 60 y cuya diferencia sea 21.

Significado de las incógnitas	Soluciones

Planteamiento del sistema de ecuaciones.	Chequeo

Libro : 7-23

Actividad (3 minutos, pupitre)

Efectuar el ejercicio

Comentario

Actividad para que los estudiantes comiencen a fijar el esquema de resolución de este tipo de problemas con palabras.

CLASE 17

VISION GLOBAL

El capítulo 8 es fundamental para la consolidación de técnicas de graficación poderosas que no utilizan el concepto de derivada. Existe una serie de ventajas para hacer un aprendizaje con estos objetos matemáticos. Desde el punto de vista del funcionamiento de significados en el cuadro gráfico : ayudan a una simbolización del gráfico. Dicho de otro modo : facilitan el uso del gráfico como portador de significado.
Un análisis extenso de la didáctica de este capítulo puede verse en [1]. Pareciera qu MG es el único libro de texto que desarrolla el contenido de este capítulo. Por ello es importante que los jóvenes profesores lean cuidadosamente las clases de este capítulo (17, 18 y 19).

La primera clase (la 17) es muy densa conceptualmente. Está destinada a cubrir casi todos los nuevos conceptos del capítulo.

1- Noción de transformación horizontal asociada a una curva.

2- Aplicación de una transformación horizontal a un dibujo y a un gráfico.

3- Regla para dar el nombre del gráfico transformado.

4- Dada una fórmula compuesta de dos teclas, construir su gráfica, aplicando una transformación horizontal.

FASE INICIAL

ESCENA 1

Pizarra

Dudas.

Libro : Capítulo 7

Actividad (15 minutos, pizarra, pupitre o consulta individual)

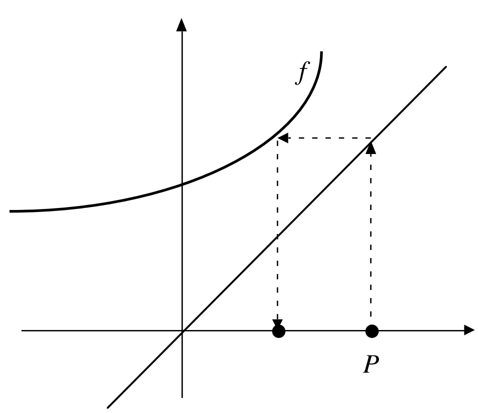
Comentario

Es importante asegurarse de que la mayoría de los estudiantes ha llegado antes de iniciar la fase media de esta clase, porque los conceptos que van a ser tratados son nuevos para ellos.

FASE MEDIA

ESCENA 2

Pizarra



Libro : 8-1

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

Ponerle nombre al punto final del camino. Es decir : $T_f^H(P)$.

Comentario

Con esta actividad se asigna nombre a los puntos transformados: los puntos finales del tipo de camino que aparece en la figura. Este tipo de camino servirá para descubrir lo que hacen las transformaciones. Esta actividad de asignación de nombre es útil porque permite diferenciar claramente entre el punto final y el punto inicial.

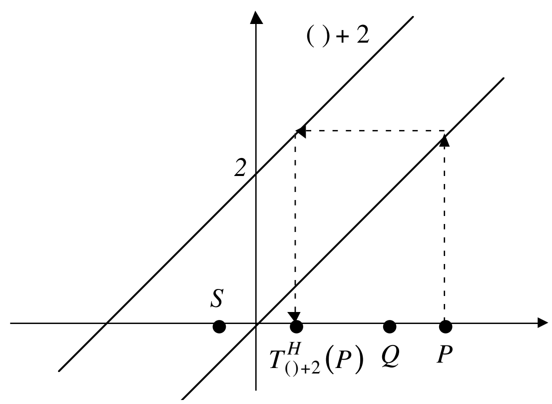
Las convenciones para asignar un nombre al punto final no son las mismas que las convenciones del capítulo 2 para dar el nombre de un punto final de un camino. Sin previo aviso se comienza a ver el punto final como el resultado de "una transformación" del punto inicial. Y esto es lo que subyace a la nueva notación. Es conveniente explicar claramente cómo se forma el símbolo $T_f^H(P)$: porqué la T, porqué la H y porqué la f.

Las convenciones del capítulo 2 son muy importantes a la hora de definir la transformación, pero esto no se va a hacer.

Observe que se está haciendo en el dibujo un caso muy particular: la función es inyectiva. Esto permite que el transformado sea un conjunto formado por un sólo punto y el símbolo $T_f^H(P)$ pareciera designar a ese punto. La situación se vuelve más complicada cuando la función no es inyectiva o cuando el transformado da el conjunto vacío. Sin embargo, tratar esta situación al comienzo del capítulo no tiene sentido.

ESCENA 3

Pizarra



Libro : 8-1

Actividad (Pupitre y pizarra, 4 minutos)

Primero pedirles que completen en sus resp ectivos libros los caminos. Y luego, desde la pizarra hacer preguntas, para llevar gradualmente a la "VERBALIZACIÓN" de la transformación. Estas preguntas son las del libro o algo similar:

$T_{()+2}^H(P)$ queda a la izquierda de P. ¿Sucede lo mismo con Q y $T_{()+2}^H(Q)$? _________. ¿Sucede lo mismo con S y $T_{()+2}^H(S)$? _________. ¿Cree que eso suceda con cualquiera de los puntos del eje x y su transformado por $T_{()+2}^H$?_________. Trate de dar una razón en términos de las posiciones de $(\ )+2$ y la bisectriz.

¿El movimiento de los puntos hacia la izquierda es siempre de la misma magnitud? ____ .

¿De cuánto es esa magnitud?_________.

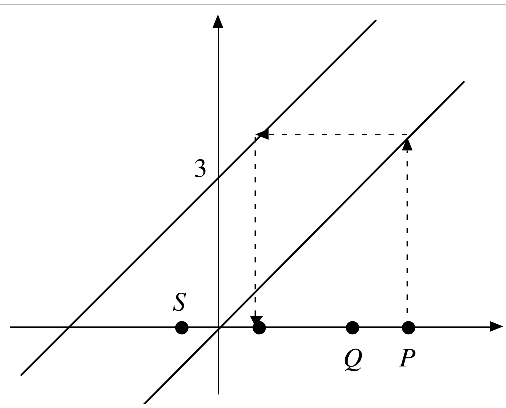
Comentario

Lo que llamaremos la "VERBALIZACIÓN", es el conjunto de palabras castellanas que dan una idea más o menos precisa de lo que hace la transformación a un punto. En general la "VERBALIZACIÓN" permite hacer la transformada sin el camino. Y en este sentido es muy importante.

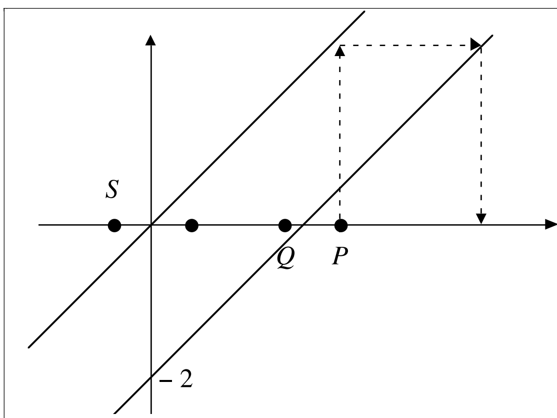
Pero por otro lado es muy importante, desde el punto de vista del aprendizaje, que el alumno sepa obtenerla y que no la adquiera como una receta. Si la receta substituye al proceso de hacer la "VERBALIZACIÓN" el alumno estará perdido para abordar el estudio de transformaciones para las cuales la verbalización no es tan sencilla.

ESCENA 4

Pizarra



Conclusiones acerca de la transformación:



Conclusiones acerca de la transformación:

Libro : 8-2

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

Hacer varios caminos en la pizarra y sacar las conclusiones.

El trazado de los caminos debería ser dictado al profesor por los alumnos, para así asegurar que han captado cuál es el orden correcto de las esquinas del camino.

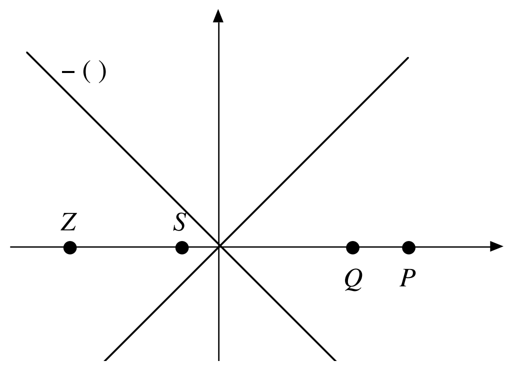
Comentario

Los alumnos captan muy rápidamente que si la recta es paralela a la bisectriz, el desplazamiento es tanto mayor como la "distancia" entre la recta y la bisectriz. Y que si la recta está por encima entonces va a ser hacia la izquierda. Y si está por debajo va a ser hacia la

derecha. Los ejemplos de la actividad son para ayudarlos a que lleguen a esa conclusión por ellos mismos.
La palabra "desplazamiento" es insuficientemente precisa. Es conveniente ir llevando la formulación hacia "desplazamiento tantas unidades hacia ....." y mejor aún a "traslación horizontal tantas unidades hacia...". Esta inducción gradual de la verbalización correcta debe ser hecha mediante el uso apropiado de preguntas.

ESCENA 5

Pizarra



Libro : 8-2

Actividad (Pizarra y pupitre, 3 minutos)

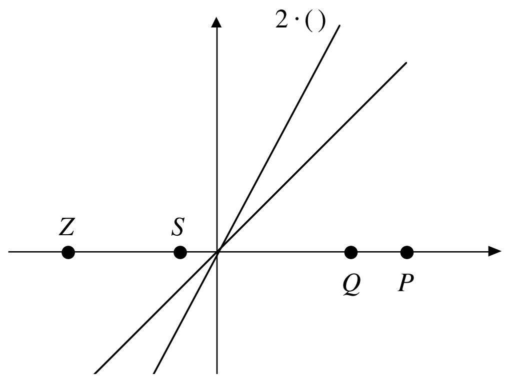
Los alumnos deben contestar las preguntas que están al lado de la figura en el libro. (Para ello deben hacer los respectivos caminos).

Comentario

Se han marcado los puntos de salida para que los alumnos realicen un número suficiente de caminos para tener idea de lo que "hace" la transformación.
Al final el profesor debería inducir, en base a las respuestas de las preguntas, la verbalización asociada a esta transformación. Algunas preguntas son ¿Es una traslación?. ¿Se mueven todos hacia la derecha?. ¿Se mueven todos hacia la izquierda?.¿Se mueven la misma distancia siempre? etc.

ESCENA 6

Pizarra



Libro : 8-3

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

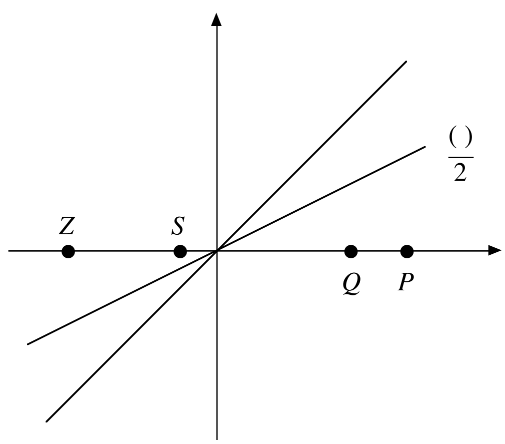
Actividad similar a la anterior.

Comentario

Es bueno señalar las diferencias que tiene esta transformación con las anteriores.

ESCENA 7

Pizarra



Libro : 8-3

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

Actividad similar a la anterior.

Comentario

Este ejercicio es para hacer notar que si la recta pasa por el orígen y tiene una pendiente positiva menor que 1 entonces la transformación asociada a ella, en vez de contraer va a dilatar. Es bueno compararla con la anterior.

ESCENA 8

Pizarra

Transformación horizontal	¿Qué hace la transformación horizontal?
$T^{H}_{()+2}$	
$T^{H}_{()+3}$	
$T^{H}_{()-2}$	
$T^{H}_{-()}$	
$T^{H}_{2()}$	
$T^{H}_{()/2}$	

Libro : 8-5

Actividad (Pizarra, 2 minutos)

Al lado de cada una de las transformaciones poner su verbalización.

Comentario

Esta actividad es para reconsiderar lo que se ha hecho en la clase hasta ese momento. Se han estudiado algunas transformaciones con el mecanismo. Es conveniente agrupar de manera clara los resultados obtenidos para su posterior utilización en la clase.

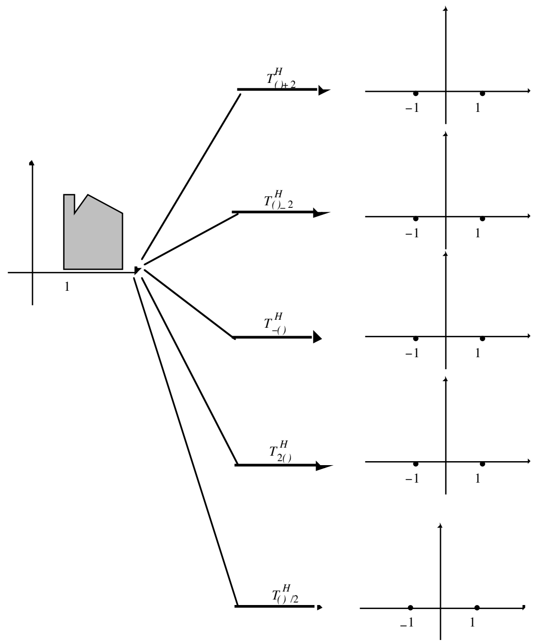
Este cuadro debería ser hecho a un lado de la pizarra para poder ser utilizado en el resto de la clase.

Nótese que en esta primera parte de la clase se ha mostrado al alumno el nuevo objeto "transformación horizontal". Se han dado algunos ejemplos. Y de alguna manera la tabla lleva implícita la referencia al conjunto de transformaciones.

Con esta actividad se termina la primera parte de la clase.

ESCENA 9

Pizarra



Libro : 8-6

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

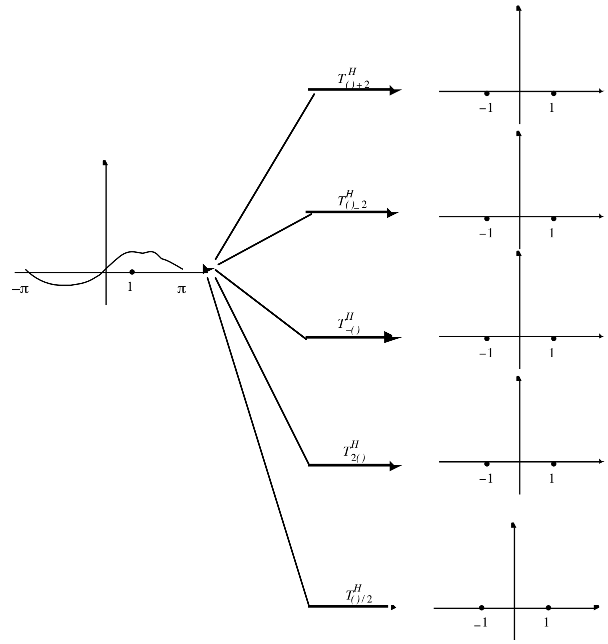
Se trata de dibujar la transformada del dibujo dado por la casita, en cada uno de los casos.

Comentario

Se debería hacerlo preguntando a los alumnos y haciendo referencia explícita a la tabla que se hizo en la actividad anterior. Con esta actividad el alumno comienza a "aplicar" las transformaciones horizontales.

ESCENA 10

Pizarra



Libro : 8-7

Actividad (Pupitre, 5 minutos)

Pedir que pongan los puntos de corte con los ejes.

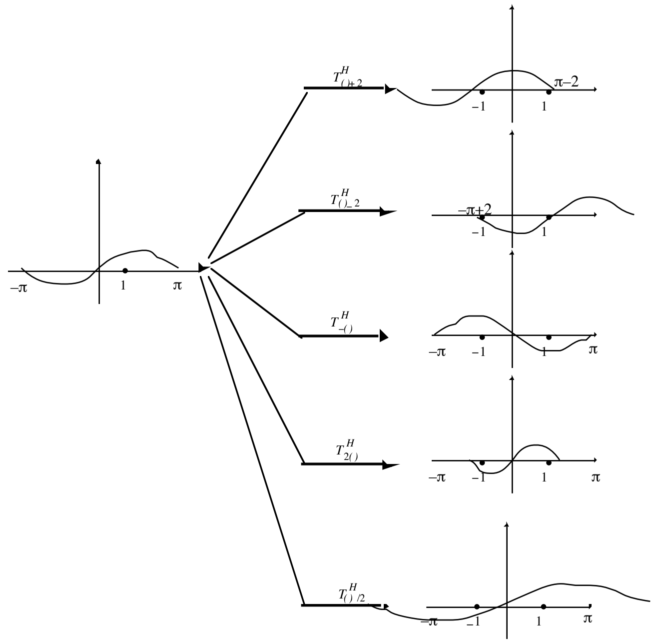
Comentario

En general los puntos de corte son los que indican si el alumno está comprendiendo el efecto de la transformación (ya que el dibujo puede ser demasiado impreciso).

Con esta actividad se termina la segunda parte de la clase.

ESCENA 11

Pizarra



Libro : 8-8

Actividad (Pizarra y pupitre, 3 minutos)

Se completa la figura de la actividad anterior con gráficas, de acuerdo a las respuestas que han debido dar los alumnos en sus pupitres.
Desde la pizarra se plantea la pregunta ¿qué nombre tienen esas nuevas curvas?
Es probable que hayan varias sugerencias.

Comentario

Las dos primeras gráficas de la figura del libro están incorrectas. La primera tiene el primer punto de corte a la izquierda del eje y demasiado cerca de -1 y la segunda tiene el primer corte a la derecha del eje y demasiado cerca de 1.
Se puede enunciar la regla: sustituir en la fórmula del gráfico inicial (que en este caso es seno) el espacio en blanco por la función que dió origen a la transformación horizontal.
Hacer, como ejemplo la primera curva: la curva que se va a transformar se llama $Sen(\quad)$. Y se le aplica $T^{H}_{()+2}$. Por lo tanto su nombre es $Sen(()+2)$. El resto de los nombres deberían ser hechos por los alumnos en sus pupitres.
Esta actividad es fundamental. La propiedad de cómo construir el nombre es, en la teoría que subyace al tema, una propiedad functorial. Sólo se quiere que los alumnos aprendan el aspecto operativo de esa propiedad functorial.

La capacidad de construir el nombre de la curva resultante es una actividad de simbolización fina. Y es fundamental para el funcionamiento significante de las curvas, como gráficas de funciones.
Con esta actividad se cubre la tercera parte de la clase.

ESCENA 12

Pizarra

Graficar $Cos(\ )$ y $Cos((\ )+2)$.

Libro : 8-10

Actividad (pupitre, 3 minutos)

Sugerir al alumno que parta del gráfico de $Cos(\ )$ y aplique las transformación apropiada.

Comentario

El procedimiento de graficar la compuesta de dos teclas, puede verse de manera sencilla como la modificación apropiada (de acuerdo a la transformación asociada a la primera tecla) del gráfico de la última tecla de la composición.
En esta fase sólo se pretende acostumbrar el ojo a ver las dos teclas . A graficar la última. A reconocer cuál transformada aplicar y a aplicar esa transformada.

ESCENA 13

Pizarra

Graficar $e^{-(\ )}$ y $-e^{(\ )}$.

Libro : 8-11

Actividad (pupitre y pizarra , 4 minutos)

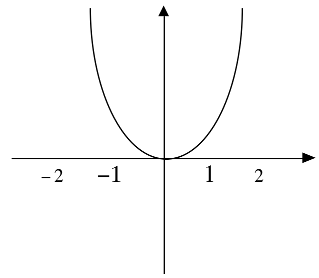
Comentario

El gráfico de $-e^{(\ )}$ no se obtiene con lo que se sabe de transformaciones hasta ahora. Sin embargo, con lo que se sabe del Capítulo 4 (sugerirles a los alumnos que se acuerden del capítulo 4) se puede hacer ya que $-e^{(\ )} = -1 \cdot e^{(\ )}$.
Es importante enfatizar la diferencia de ambas gráficas. Y la relación que tiene con el orden de composición. (Se pueden hacer los respectivos diagramas en la pizarra).

FASE FINAL

ESCENA 14

Pizarra



A partir de la gráfica de la figura grafique $((\ \ )+2)^2$ y $((\ \ )-2)^2$.

Libro : no figura.

Actividad (Pupitre, 2 minutos)

Comentario

Esto es una pequeña actividad que permite reencontrar algo que ya han estudiado en el Capítulo 6, pero hecho de otra manera. Con el objeto de que vean cómo las nuevas técnicas posibilitan cosas que ya antes se podían hacer. Y también dan nuevas visiones sobre viejos temas.

CLASE 18

VISION GLOBAL

Esta clase tiene tres objetivos principales.

1- Hacer el trabajo análogo al que se hizo en la clase pasada con las transformaciones horizontales. En este caso se introduce y estudia la noción de transformación vertical.

2- Comenzar a graficar fórmulas que son compuesta de dos teclas, utilizando, de acuerdo a lo que convenga, transformaciones de tipo horizontal o de tipo vertical.

3- Iniciar la asignación de nombres a curvas utilizando las transformaciones.

FASE INICIAL

ESCENA 1

Pizarra

Dudas

Libro : Capítulo 8

Actividad (10 minutos, pizarra, pupitre o consulta individual)

Conviene hacer preguntas tratando de hacer un resúmen de la clase pasada. Preguntar por ejemplo cómo se descubre cuál es la transformación asociada a una curva.

¿Cuáles fueron las transformaciones estudiadas? ¿Qué es lo que hacen?..etc.

¿Cómo se construye el nombre de $T_f^H(g)$?

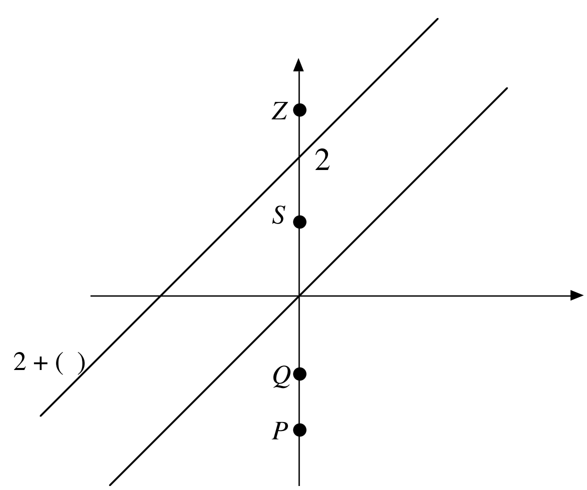
Comentario

Las actividades sugeridas son importantes, no sólo para preparar el inicio de la fase media de la clase, sino porque la clase anterior es bastante densa y es oportuno tener la posibilidad de recordar parte de su contenido.

FASE MEDIA

ESCENA 2

Pizarra



Libro : 8-17

Actividad (Pizarra, 5 minutos)

Se trata de introducir el camino de las transformaciones verticales.

Conviene hacer la analogía con el camino de las horizontales.

Como siempre, después de varios caminos hay que hacer una verbalización de la transformación. (Traslada verticalmente dos unidades hacia arriba).
Se puede hacer un ejemplo aplicándolo a una curva, por ejemplo $T^{V}_{(\ )+2}\left(G\left(Sen(\ )\right)\right)$. Y preguntar a qué operación gráfica hecha anteriormente se parece. ¿Dónde se estudiaron esas operaciones gráficas?
Haga notar que se hace esa operación gráfica cuando se grafica la fórmula $Sen(\ )+2$.
Y de ahí se puede ya enunciar que en el caso de la vertical, el nombre de la curva resultante no se construye de la misma manera que si fuese horizontal. En el caso de la vertical ...etc.

<u>Comentario</u>

Esta figura no aparece en el libro.

ESCENA 3

<u>Pizarra</u>

Si es la transformación **vertical** inducida por g la que se aplica a $G(f)$, el nombre de la función del gráfico resultante es $g \circ f$.

$$T^{V}_{g(\ )}(G(f(\ \ \ )))$$

Si es la transformación **horizontal** inducida por g la que se aplica a $G(f)$, el nombre de la función del gráfico resultante es $f \circ g$.

$$T^{H}_{g(\ )}(G(f(\ \ \ )))$$

<u>Libro : 8-25</u>

<u>Actividad (3 minutos, pizarra,)</u>

Analizar con cuidado la reglas. Ver que de cierta manera "son opuestas". Hacer ver claramente que de $T^{V}_{(\ )+2}\left(G\left(Sen(\ )\right)\right)$ aplicando la regla que corresponde a las transformaciones verticales se obtiene $Sen(\ )+2$

<u>Comentario</u>

ESCENA 4

Pizarra

Transf. Aplicada a Gráf.	Fórmula
$T_{\boxed{}}^{\boxed{V}}(\qquad)$	$Cos\left(e^{(\ )}\right)$
$T_{\boxed{}}^{\boxed{H}}(\qquad)$	$Cos\left(e^{(\ )}\right)$

Libro : 8-25

Actividad (5 minutos, pizarra, pupitre)

Completar lo que está en la pizarra.

Completar otra parte de la misma tabla que está en la página. (los alumnos en el pupitre).

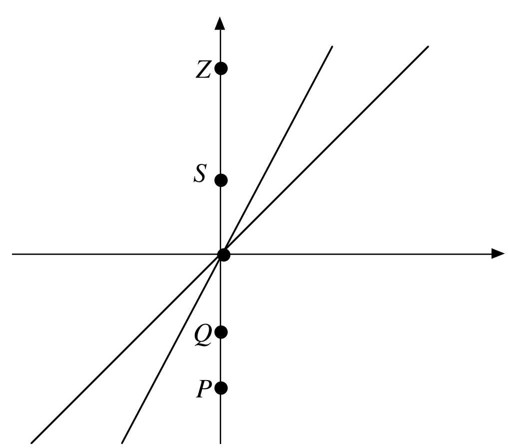
Comentario

Estas reglas de aplicación sencilla, son fundamentales para la comprensión y utilidad del tópico.

A veces la G que aparece en las fórmulas causa confusión en los alumnos, (la G quiere decir gráfico). Se puede no ser demasiado estricto en su uso explícito. Depende del curso y del profesor.

ESCENA 5

Pizarra



2.( )

Libro : 8-17

Actividad (Pupitre, 4 minutos)

Estudio de $T^V_{2(\ )}$. De su verbalización.

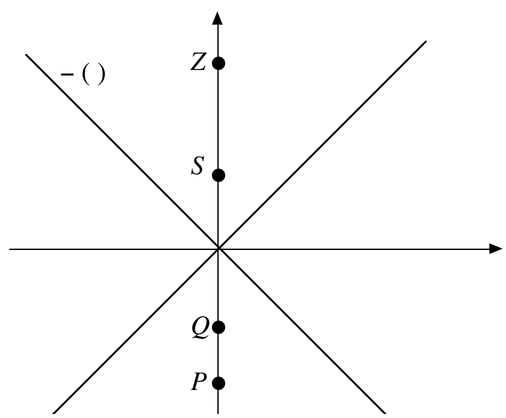
Se puede solicitar a los alumnos que comparen las verbalizaciones de $T^H_{2(\ )}$ y $T^V_{2(\ )}$ y las verbalizaciones de $T^H_{(\ )/2}$ y $T^V_{(\ )/2}$

Comentario

Con esta actividad se inicia de manera sistemática el estudio del conjunto de transformaciones verticales del curso. El estudio explícito de $T^V_{2(\ )}$ no aparece en la página 8-17, pero, al igual que $T^V_{(\ )/2}$, es un caso particular de $T^V_{a(\ )}$.

ESCENA 6

Pizarra



Libro : 8-18

Actividad (2 minutos, pizarra)

Estudio de $T^V_{-(\ )}$. Su verbalización. Se puede solicitar a los alumnos que comparen las verbalizaciones de $T^V_{-(\ )}$ y $T^H_{-(\ )}$

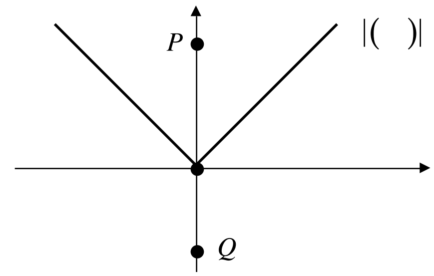
Comentario

ESCENA 7

Pizarra

Marque sobre el eje y

$T^V_{|\,|}(P)$, $T^V_{|\,|}(Q)$, $T^V_{|\,|}(0)$



Libro : 8-19

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

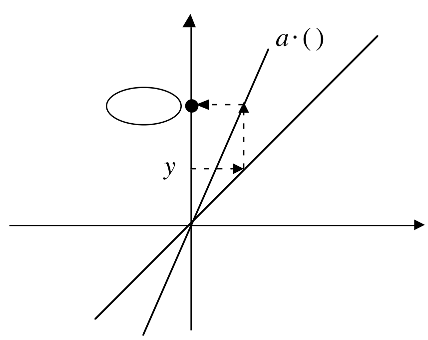
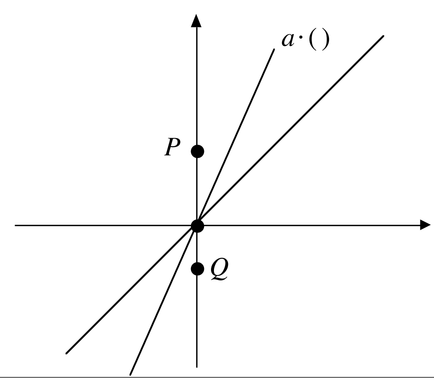
Estudio y verbalización de $T^V_{|\ |}$.

Comentario

Puede hacer notar que esta propiedad fué dada para resolver inecuaciones con valor absoluto de fórmulas. Pero para ello debe hacer ver que la regla de construcción de nombre aplicada en este caso da el valor absoluto de la fórmula. Es decir que : $T^V_{|\,|}\big(G(f(\ ))\big) = G(|f|)$.

ESCENA 8

Pizarra

Complete la elipse: 	Marque sobre el eje y los puntos que corresponden a $T^V_{a(\,)}(P), T^V_{a(\,)}(Q), T^V_{a(\,)}(0)$. 

Libro : 8-17

Actividad (Pizarra, 2 minutos)

Estudio y verbalización de $T^V_{a\cdot(\ )}$, asumiendo que $a > 0$.

Comentario

Esta actividad es consecuencia de la escena 5. Y podría hacerse simultáneamente a ella.

ESCENA 9

Pizarra

TRANSFORM. VERTICAL	VERBALIZACION
$T^{V}_{(\ )+2}$	
$T^{V}_{2\cdot(\ )}$	
$T^{V}_{-(\ )}$	
$T^{V}_{a\cdot(\ )},\quad a>0$	
$T^{V}_{\lvert\ \rvert}$	

Libro : no figura

Actividad (Pizarra, 2 minutos)

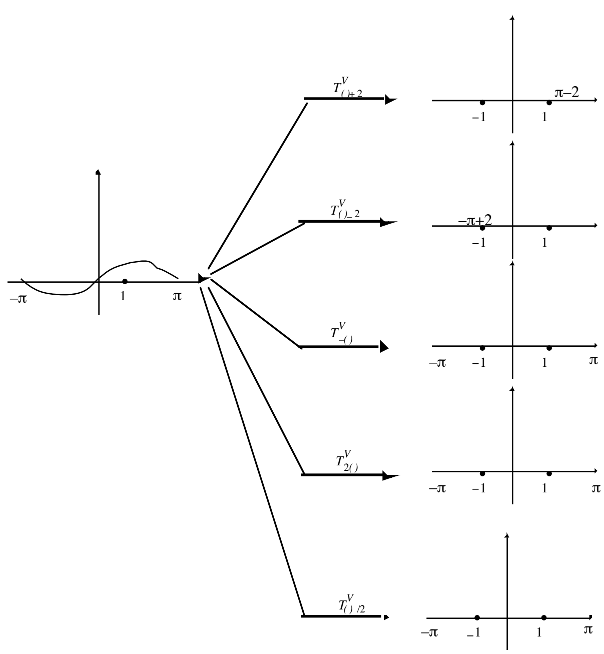
Se trata de resumir los estudios hechos en la clase, hasta este momento, sobre transformaciones verticales.

Comentario

El cuadro debería ser hecho a un lado de la pizarra para su posterior utilización en la clase y en particular en la próxima actividad.

ESCENA 10

Pizarra



Libro : no figura

Actividad (Pizarra, 4 minutos)

Hacer las curvas que resultan de aplicar las transformaciones a la curva inicial del seno.

Comentario

Esta actividad debería hacerse con la ayuda de los alumnos, preguntando (en cada caso), qué forma tiene la curva resultado, cómo se debe mover la curva inicial, etc.

ESCENA 11

Pizarra

Grafique (poniendo puntos de corte) $e^{(\ )+2}, e^{(\ )}+2$,

Libro : no figura

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

Hacer los gráficos de estas fórmulas.

Comentario

Esta actividad tiene por objeto que los alumnos tengan la oportunidad de distinguir los resultados de transformaciones aplicadas a la misma curva.

Existe la tendencia en algunos alumnos en simplificar de manera errónea la aplicación de las transformaciones a la graficación de fórmulas. Un ejemplo de ello es la frase "si se suma un número hay que mover "la" curva hacia la izquierda". Al decir esa frase no están tomando en cuenta la información clave de "a quién se suma el número" y evidentemente esto conduce, en algunos casos, a respuestas erradas.

La intención de la actividad es que tomen conciencia de que siempre hay que preguntarse : a quién suma el número.

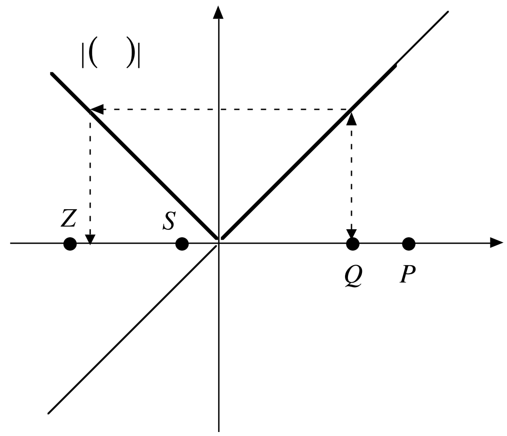
Una manera de inducir ese cuidado (necesario) en el manejo del lenguaje, es pidiendo que partan de la tecla que primero grafican y que va a ser transformada (en este caso $e^{(\ )}$) y vean cómo debe ser modificada para llegar a la fórmula que se pide graficar (por ejemplo $e^{(\ )+2}$). En este caso conviene ver a $e^{(\ )+2}$ como $e^{((\ )+2)}$. (Para que vean a quién hay que meter dentro de quién).

ESCENA 12

Pizarra

Marque sobre el eje x

$$T_{|\,|}^{H}(P),\quad T_{|\,|}^{H}(S),\quad T_{|\,|}^{H}(Z),\quad T_{|\,|}^{H}(0)$$



Libro : 8-21

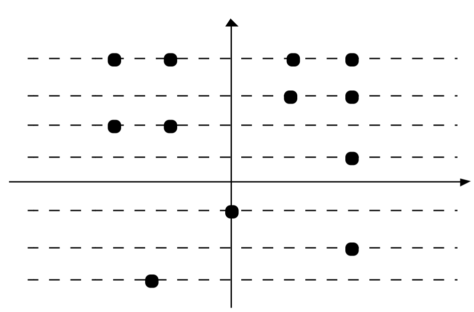
Actividad (Pupitre y pizarra, 3 minutos)
Verbalización de la transformación horizontal asociada al valor absoluto.

Comentario

Esta es una transformación muy interesante: por un lado hay puntos que se convierten en nada (el vacío). Otros que se convierten en un conjunto de dos puntos simétricos (y uno de los puntos de ese conjunto es el punto de partida).
En el pupitre el estudiante debería estudiar $T^H_{|\ |}$ y verbalizarla. El profesor, al final de la actividad, debe desde la pizarra resumir lo hecho por los alumnos y dar la verbalización correcta.

ESCENA 13

Pizarra
Marque los puntos que resultan de aplicar $T^H_{|\ |}$ a los puntos que aparecen en la figura. (A veces va a tener que marcar encima de algunos de los puntos).



Libro : 8-21

Actividad (3 minutos, pupitre)

Comentario

En el dibujo figuran líneas horizontales para mostrar que los transformados de los puntos deben estar en las mismas rectas horizontales que los que se transforman.

ESCENA 14

Pizarra

Grafique (poniendo puntos de corte) $|(\ )+2|$, $|(\ )|+2$.

Libro : no figura

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

Comentario

Esta actividad es similar a la antepenúltima, en el sentido de que no basta decir que en la fórmula hay un valor absoluto y por lo tanto ...

Aquí como en la otra actividad conviene ver cómo la fórmula $(\ )+2$ debe ser modificada para obtener $|(\ )+2|$ o $|\ |+2$. Para esta última es conveniente hacer notar que es equivalente a $(|\ |)+2$, es decir que en el algo de $(\ )+2$, se ha metido el $|\ |$ y por lo tanto....

Además, en esta actividad se hace una primera aplicación de la transformación horizontal del valor absoluto. Y se ve la gran diferencia que hay con la transformación vertical del valor absoluto.

ESCENA 15

Pizarra

Grafique $Ln(|\ |)$ y $|Ln(\ )|$

Libro : 8-22

Actividad (3 minutos, pupitre y pizarra al final)

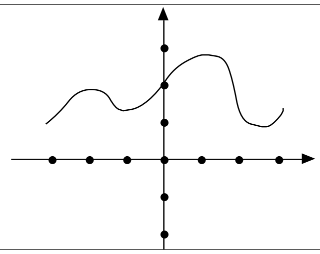
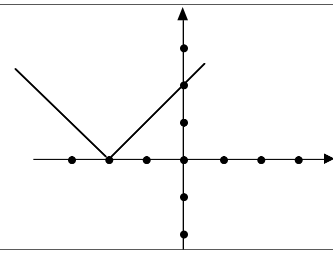
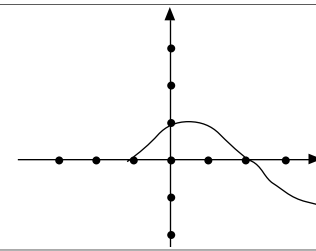
Comentario

Nuevamente esta actividad plantea el saber exactamente si se debe aplicar horizontal o vertical.

Hay dificultad en los alumnos de aceptar que la curva de $Ln(|\ |)$ tiene dos partes, una la de $Ln(\ )$ y la otra la simétrica de la de $Ln(\ )$ con respecto al eje y. Esto es recomendable comentarlo en la pizarra al final de la actividad.

ESCENA 16

Pizarra

		
Nombre de la función f que hubo que transformar.	$f(x) = \|x\|$	
Transformación que se aplicó.	$T^H_{(\ )+2}$	
Descripción de la curva.	$T^H_{(\ )+2}(\|\quad\|)$	
Nombre o fórmula que corresponde a la curva(aplicar reglas).	$\|x+2\|$	

Libro : 8-26

Actividad (Pizarra y Pupitre, 4 minutos)

Primero explicar lo que ya aparece completado en el libro.

En segundo lugar dejar que los alumnos en el pupitre llenen la última columna.

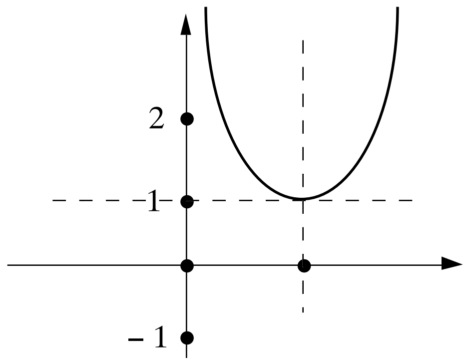
Comentario

La intención de esta actividad es iniciar al alumno, utilizando transformaciones, en la asignación de nombres a las curvas.

FASE FINAL

ESCENA 17

Pizarra



Libro : no figura

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

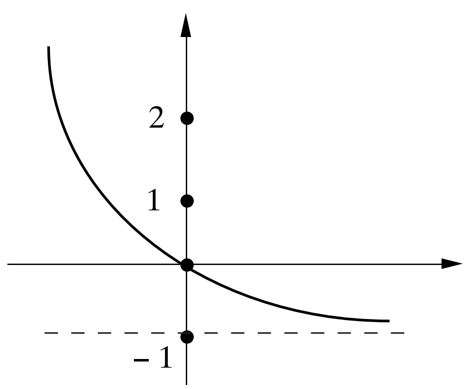
Cuantas transformaciones se aplicaron al gráfico de $(\ )^2$ para obtener la curva de la figura? Pida al alumno que escriba la expresión con transformaciones T (T (G ($(\ )^2$)))

¿Cuál es la fórmula de la figura?, etc.

Comentario

ESCENA 18

Pizarra



Libro : no figura

Actividad (Pupitre, 2 minutos)

¿Cuantas transformaciones se aplicaron al gráfico de $e^{(\ )}$ para obtener la curva de la figura? ¿Cuáles?. Pida al alumno que escriba la expresión con transformaciones T (T (G ($e^{(\ )}$))). ¿Cuál es la fórmula de la figura?, etc.

Comentario

CLASE 19

VISION GLOBAL

Esta tercera clase sobre el Capítulo 8, tiene por objetivos :

1- Extender el método estudiado en las dos primeras a la graficación de compuestas de más de dos teclas elementales.

Una primera generalización se hace para las funciones de tipo sinusoidal. Estas funciones son muy utilizadas en física, para representar fenómenos eléctricos en particular. Además a pesar de que son compuesta de más de dos teclas, las teclas que no son seno o coseno, corresponden a rectas.

La segunda generalización es para la compuesta de cualquier tipo de teclas elementales.

2- Insistir sobre cómo dar nombres a las gráficas.

FASE INICIAL

En esta fase inicial, no hay mucho tiempo para dudas. Conviene mejor hacer actividades de fijación de las clases pasadas. En primer lugar las reglas para poner los nombres de las curvas a partir de las transformaciones utilizadas y el nombre de la curva inicial. En segundo lugar aplicar el mecanismo (ya conocido) para estudiar la transformación (todavía no estudiada) $T^{H}_{\frac{1}{(\ )}}$.

ESCENA 1

<u>Pizarra</u>

T^H_f aplicado al gráfico de g da el	gráfico de $g(f)$
T^V_f aplicado al gráfico de g da el	gráfico de $f(g)$
$T^H_{(\ )/2}$ aplicado al gráfico de $e^{(\ )}$ da el	gráfico de
$T^V_{(\ )/2}$ aplicado al gráfico de $e^{(\ )}$ da el	gráfico de
$T^H_{(\ )+2}$ aplicado al gráfico de $(\ \ )^2$ da el	gráfico de
$T^V_{(\ )+2}$ aplicado al gráfico de $(\ \ )^2$ da el	gráfico de
$T^V_{Sen(\ )}$ aplicado al gráfico de $Ln(\ )$ da el	gráfico de
$T^H_{Sen(\ )}$ aplicado al gráfico de $Ln(\ )$ da el	gráfico de
aplicado al gráfico de da el	gráfico de $Ln(\|\ \ \|)$
aplicado al gráfico de da el	gráfico de $\|Ln(\ )\|$
aplicado al gráfico de da el	gráfico de $-e^{(\ )}$
aplicado al gráfico de da el	gráfico de $e^{-(\ )}$

Libro : no figura

Actividad (Pizarra, 4 minutos)

Completar adecuadamente la tabla.

Comentario

Si es muy largo puede poner en la pizarra sólo una parte de la tabla.

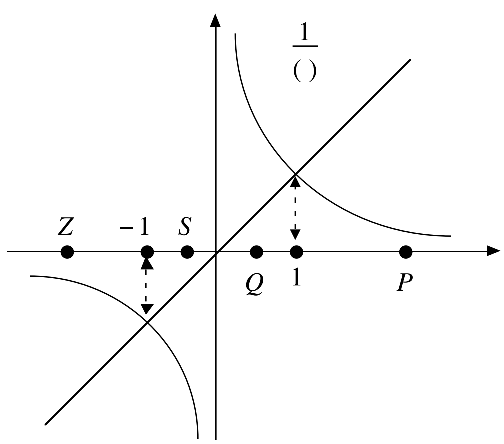
Esta actividad es para ir asentando cómo se construye el nombre de la curva resultante de aplicar a una curva, de nombre conocido, una transformación específica. Si estuviera en el libro la actividad podría ser hecha en pupitre. En este momento, por razones de tiempo, conviene hacerla en pizarra, aunque preguntando a los alumnos las respuestas.

ESCENA 2

Pizarra

Marque sobre el eje x

$T^{H}_{\frac{1}{(\,)}}(P)$, $T^{H}_{\frac{1}{(\,)}}(S)$, $T^{H}_{\frac{1}{(\,)}}(Z)$, $T^{H}_{\frac{1}{(\,)}}(Q)$, $T^{H}_{\frac{1}{(\,)}}(0)$



¿Cuales son los puntos que $T^{H}_{\frac{1}{(\,)}}$ deja fijos?_____.

¿Que pasa con 0?___________________.

Si $P \in [1,\infty)$ entonces $T^{H}_{\frac{1}{(\,)}}(P) \in$?

Si $Q \in (0,1]$ entonces $T^{H}_{\frac{1}{(\,)}}(Q) \in$?

Si $Z \in (-\infty,-1]$ entonces $T^{H}_{\frac{1}{(\,)}}(Z) \in$?

Hay algún punto de abcisa positiva que se transforma en uno de abcisa negativa?________.

Hay algún punto de abcisa negativa que se transforma en uno de abcisa positiva?________.

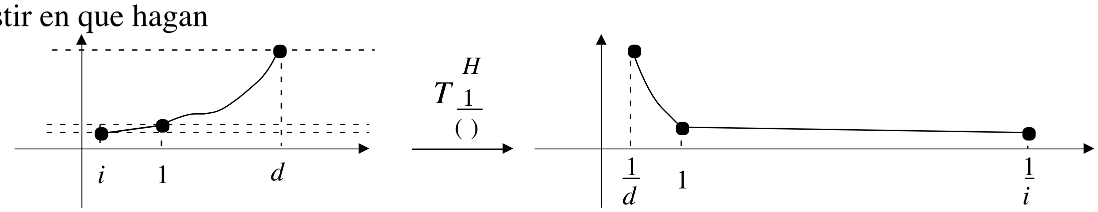
Libro : 8-36

Actividad (Pupitre, 6 minutos)

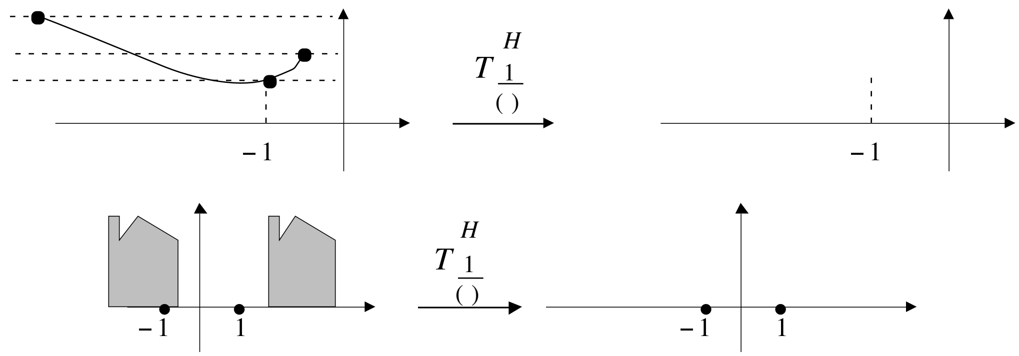
Estudio y verbalización de $T^{H}_{1/(\,)}$.

Comentario

Insistir en que hagan



y



ESCENA 3

Pizarra

Grafique $Sen(1/x)$.

Libro : 8-37

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

Comentario

Este ejercicio causa sorpresa en los estudiantes. Pero es formativo: rompe un poco el juego inicial de traslaciones, contracciones, simetrías, que tiende a mecanizarse.

Conviene sugerirles que marquen primero los puntos de la gráfica del seno que no se van a mover.

La aplicación de $T^{H}_{\frac{1}{()}}$ no es trivial : hay que dividir el plano cartesiano en cuatro franjas verticales :: la que están sobre $(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,\infty)$. Es conveniente trazar las verticales que pasan por -1 y 1, para que queden claramente establecidas las franjas. Sin embargo, los alumnos tienen dificultades en captar que esta división del plano en franjas es una institucionalización del trabajo hecho punto a punto.

FASE MEDIA

Las actividades de las páginas 8-13 y de 8-41 son ambas de graficación de compuestas de más de dos teclas. Sin embargo, las primeras son muy particulares : se trata prinicpalmente de funciones sinusoidales y se puede hacer inclusive sin conocer las transformaciones verticales. (Utilizando lo aprendido en los capítulos 2 y 4). Las escenas que siguen se refieren a esa parte.

ESCENA 4

Pizarra

Graficar la fórmula $4Sen(2x+3)-1$

Libro : 8-13

Actividad (5 minutos, pizarra)

Comentario

Conviene hacer esta gráfica preguntándoles, desde la pizarra, a los alumnos las transformaciones (comprimir horizontalmente, trasladar verticalmente,...etc). Conviene hacer notar o recordar que varias de las transformaciones verticales son operaciones gráficas que se hicieron en el Capítulo 2, que corresponden a sumar una constante al gráfico de una función o a multiplicar por una constante el gráfico de una función.

Como se ve el ejercicio tiene dos partes : la primera es aplicarle al seno las transformadas horizontales respectivas (y en el orden inverso al que aparecen las teclas en el diagrama, es decir de abajo para arriba a partir de la tecla seno). Y luego aplicar producto por constante y suma de una constante.

El punto más difícil suele ser calcular los puntos de corte. Un ejemplo de cómo hacerlo de manera sencilla aparece en la página 8-15. Se deja el arco correspondiente sin darle ningun valor específico para obtener una expresión de x que involucre el arco. En el caso de este ejercicio sería :

$$x = \frac{ArcSen\left(\frac{1}{4}\right) - 3}{2}$$

Luego se busca la forma general de los valores del arco

$$ArcSen\left(\frac{1}{4}\right) = 0.25268 + 2k\pi \ \text{ o } \ ArcSen\left(\frac{1}{4}\right) = \pi - 0.25268 + 2k\pi .$$

Y esa fórmula se sustituye en la expresión que se había obtenido para x. Es decir

$$x = \frac{0.25268 + 2k\pi - 3}{2} = -1.3736 + k\pi \ \text{ o } \ x = \frac{\pi - 0.25268 + 2k\pi - 3}{2} = -0.0555 + k\pi \text{ con } k \in Z.$$

Si bien es bueno hallar la expresión general de los puntos de corte (porque permite ver la necesidad de resolver una ecuación con infinitas soluciones de manera completa), no se debería insistir demasiado en los tecnicismos : no es algo central al curso.

ESCENA 5

Pizarra

Graficar la fórmula $2Cos(3x-1)+2$

<u>Libro : 8-15</u>

<u>Actividad (5 minutos, pupitre)</u>

<u>Comentario</u>

Esta actividad se hace para aclarar dudas sobre el procedimiento de la actividad anterior.

ESCENA 6

Pizarra

Fórmulas de la forma $ASen(2\pi \cdot wt + \phi)$

Libro : 8-23

Actividad (Pizarra, 5 minutos)

Hacerles ver que las dos primeras hechas en la clase son de ese tipo. Señalar que son muy importantes en física para describir las ondas y la corriente alterna. Dar el significado de cada una de las constantes y los nombres que tienen en física, tratando de hacer ver que el nombre está ligado al significado gráfico. Señalar que en este caso lo que nosotros llamamos x, (la variable) en la expresión es el t, que suele significar tiempo.

Primero estudiar el caso $Sen(2\pi t)$. Hacerles notar que un ciclo de $Sen(2\pi t)$ ocurre en $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, a diferencia de $Sen(t)$, donde un ciclo ocurre en $[-\pi,\pi]$. (Y la longitud de $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ es 1 (una unidad de tiempo).Ver que el poner w en $Sen(2\pi t)$ para obtener $Sen(2\pi\omega t)$, equivale gráficamente a contraer, horizontalmente hacia el orígen, el gráfico de $Sen(2\pi t)$ w veces. Y por lo tanto si antes un "ciclo" sucedía en $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, ahora en ese mismo intervalo van a "realizarse" w ciclos. Por ello w recibe el nombre de frecuencia: porque dice el número de ciclos que hay en $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. La explicación de porqué el coeficiente A se llama amplitud es más sencilla: la amplitud es la mayor altura de la parte positiva de la curva. Como la mayor altura del Seno es 1, la mayor altura de $ASen(t)$ es A (suponemos que A es positiva). Finalmente queda la fase. Esto tiene que ver con la corriente bifásica y la trifásica y la potencia de la electricidad. Es más delicado de explicar.

Comentario

ESCENA 7

Pizarra

$\left|3e^{-x}-2\right|$, $\frac{1}{Ln(|x|)-2}$ y $\left|\frac{1}{Ln(x)-2}\right|$.

Libro : 8-41

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

Hacer los diagramas de las tres fórmulas.

Comentario

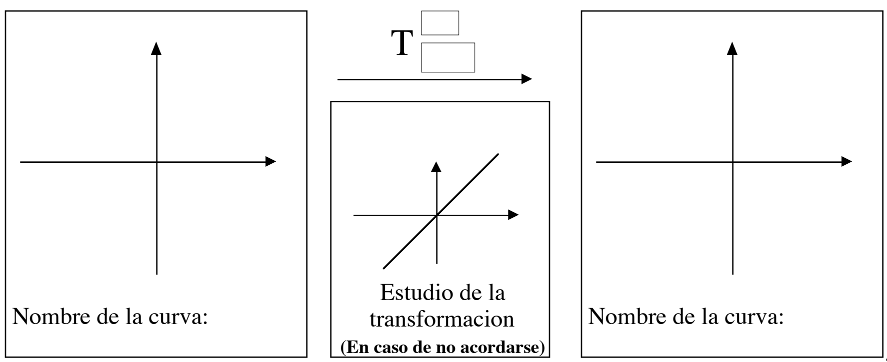
La segunda parte de la fase media consiste en enseñar el método general de graficación de funciones compuestas utilizando transformaciones. Detrás de este método está un teorema que no puede ser entendido, a estas alturas, por los alumnos.
Por ello se hace a través de tres etapas, cada una con un dispositivo.

Etapa 1 : Hacer el diagrama. de la fórmula.

Etapa 2 :Saber construir a partir del diagrama el dispositivo de la forma

$$T_{\square}^{\square}\,T_{\square}^{\square}\,T_{\square}^{\square}\,T_{\square}^{\square}\left(\qquad\right).$$

Etapa 3 : Utilizar el dispositivo de la forma $T_{\square}^{\square}\,T_{\square}^{\square}\,T_{\square}^{\square}\,T_{\square}^{\square}\left(\qquad\right)$ debidamente completado para hacer las acciones correspondientes en el plano cartesiano. En esta tercera fase se puede utilizar, como ayuda para ordenar el trabajo, sucesiones del dispositivo :



Para aligerar la clase conviene tomar un grupo de fórmulas bien escogidas y aplicarle simultáneamente a cada una de ellas las etapas del método. Es decir la primera etapa a todas las fórmulas, después a los diagramas aplicarles la segunda etapa y finalmente a todos los resultados de la segunda etapa aplicar la tercera etapa.
En el libro, la mayoría de las fórmulas que aparecen a partir de 8-42 exigen el uso de una de las transformaciones (vertical u horizontal) de $(\ )^2$. Probablemente en este momento de la enseñanza no convenga utilizar ese tipo de fórmulas. Sugerimos las tres fórmulas

$$\left|3e^{-x}-2\right|,\ \frac{1}{Ln(|x|)-2}\ \text{ y }\ \left|\frac{1}{Ln(x)-2}\right|.$$

La idea al escoger estas fórmulas es evitar complicaciones innecesarias con transformaciones que son todavía difíciles para numerosos alumnos. Lo que se quiere en este momento es que aprendan la estructura del método.

No olvide pensar en cómo organizar la pizarra para trabajar con las tres fórmulas simultáneamente y seguir trabajando la siguiente escena sin borrar.

La actividad de hacer los diagramas se puede hacer rápidamente, porque los estudiantes, en su inmensa mayoría dominan a esas alturas los diagramas.

ESCENA 8

<u>Pizarra</u>

Las fórmulas y los diagramas de la actividad anterior.

<u>Libro : 8-41</u>

<u>Actividad (5 minutos, pizarra)</u>

Enseñar a construir los objetos que utilizan la forma del tipo

$$T^{\square}_{\square}\, T^{\square}_{\square}\, T^{\square}_{\square}\, T^{\square}_{\square}\, (\qquad).$$

De hecho, hacer para cada uno de los diagramas tres de estas formas : una saliendo de abajo hacia arriba (que utiliza las horizontales) , otra saliendo de arriba hacia abajo (que utiliza sólo verticales) y otra saliendo de la tecla que tiene (entre las del diagrama) las transformaciones más complicadas.

<u>Comentario</u>

El objetivo de esta actividad es que el alumno aprenda cuáles deben ser las transformaciones y en qué orden deben aplicarse para obtener el gráfico de la compuesta.

Una manera de presentar el dispositivo es ponerlo en la pizarra y preguntar cómo se llena. ¿Qué hay que poner en los cuadritos superiores y en los cuadritos inferiores de la T?. Si creen que existe una sola manera correcta de llenarla. Cómo utilizar el diagrama para llenarlo...etc. A través de estas preguntas se propicia el posicionamiento del dispositivo en el medio. Se enfatiza que su llenada es una etapa esencial del método.

Esta actividad es clave para la aplicación del método de las transformaciones a funciones que son compuestas de más de dos teclas o funciones elementales.

Una de las dificultades es que hay muchas maneras correctas de llenarlo. Algunas son más útiles que otras.

La regla de llenada del dispositivo del tipo $T_{\square}^{\square}\,T_{\square}^{\square}\,T_{\square}^{\square}\,T_{\square}^{\square}\,(\qquad)$ es :

> La llenada comienza por el gran paréntesis. En ese gran paréntesis se puede poner cualquiera de las teclas del diagrama de la fórmula que se quiere graficar. Después de fijada esa primera tecla, se prosigue de derecha a izquierda.
>
> Para llenar los cuadros de una T : primero el cuadro de abajo (de la T) y luego el cuadro de arriba (de la T). El cuadro de abajo de la T, puede ser llenado por la tecla del diagrama, que está o bien inmediatamente debajo de la tecla inicial o bien la inmediatamente encima. Si se pone (en el cuadro inferior de la T) la que tecla que está (en el diagrama) encima de la tecla inicial, en el cuadro superior de la T se pone H (horizontal), en caso contrario (si la tecla en el diagrama está debajo de la tecla inicial) se pone V.
>
> Y se sigue llenando utilizando siempre las teclas contiguas al conjunto de las teclas ya utilizadas para llenar el dispositivo .

Una de las maneras más fáciles es de abajo hacia arriba del diagrama y ahí se utilizan sólo las transformaciones horizontales. La otra es de arriba hacia abajo y ahí son las transformaciones verticales.

ESCENA 9

Pizarra

Dejar las tres fórmulas y para cada una de ellas **sólo uno** de los dispositivos de la forma $T_{\square}^{\square}\,T_{\square}^{\square}\,T_{\square}^{\square}\,T_{\square}^{\square}\,(\qquad)$ debidamente completado. Así libera espacio en la pizarra para poder en primer lugar explicar el dispositivo de la tercera etapa y luego para utilizarlo para hacer la gráfica de las compuestas. Basta con hacer en la pizarra una de ellas y las otras dos restantes pedirles a los estudiantes que las hagan en el pupitre.

Libro : 8-42

Actividad (12 minutos, pizarra y pupitre)

Explicar el dispositivo de esta etapa. (2 a 3 minutos)

Hacer la curva de una de las tres fórmulas. (2 minutos)

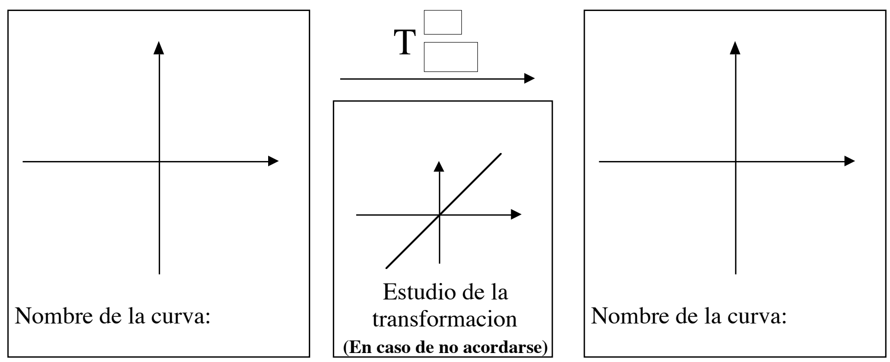
Que hagan las 2 fórmulas restantes (6 minutos)

Comentario

Esta escena tiene por objeto enseñar a hacer la tercera etapa del método. El primer paso es explicar claramente la forma (o dispositivo) que se va a utilizar en esta etapa.

El dispositivo de la tercera etapa es para organizar las acciones que los estudiantes deben hacer con las curvas, en el cuadro gráfico .

Consta de una sucesión de formas del tipo :

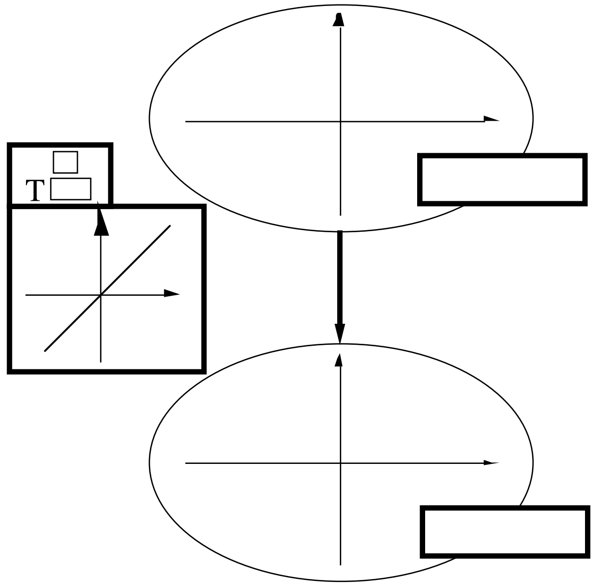


Por ello deben saber cómo utilizar el dispositivo para hacer las acciones.
Es bueno señalar qué es lo que va en cada cuadro.

Si en el primer cuadro va $G(f)$ y si lo que va encima de la flecha es T_g^H , entonces en el segundo cuadro va $G\big(f(g)\big)$. Por otro lado en este caso el nombre de la curva en el primer cuadro sería f y en el cuadro del final de la flecha sería $f(g)$.

¿Qué es lo que hay que hacer en el cuadro que está debajo de la flecha : como encima de ella está T_g^H, lo que hay que hacer es dibujar la curva de g y hacer algunos caminos para saber cuál es la verbalización de T_g^H (y de ese modo recordarla, para poder aplicar T_g^H a $G(f)$). A menudo los alumnos se acuerdan de cuál es esa verbalización, pero el hacer dos o tres caminos ayuda a evitar pequeños errores del tipo de mover la curva en el sentido contrario al que debería ser. etc.

Otro aspecto del dispositivo que se puede señalar es cómo se compara con



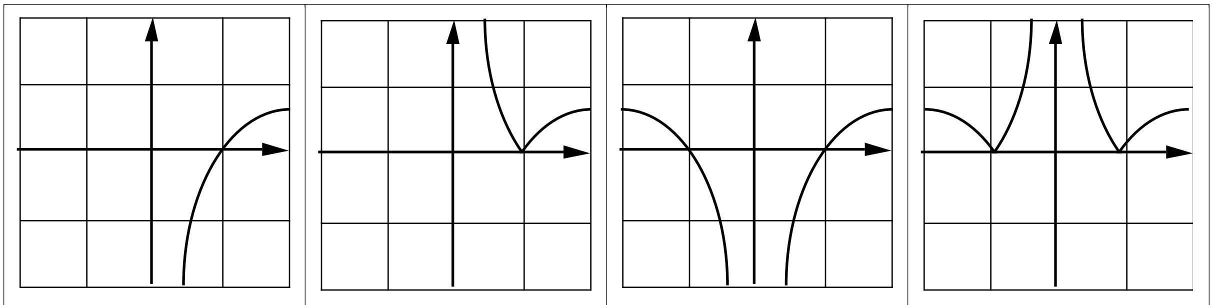
Al ponerlo en esa forma se asemeja a los diagramas estudiados en el capítulo 3. Esto ayuda a reconocer la estructura funcional de la operación (donde la tecla es la transformación y los elementos del dominio son curvas). También se debe explicar que en los cuadros cerca de las elipses va el nombre de la gráfica contenida en la elipse.
Esta comparación entre las dos formas, ayuda a que el alumno tenga una visión global del dispositivo y de algún modo adquiera más sentido. Por otro lado, el trabajo de abstracción, necesario para reconocer que en el fondo se está aplicando funciones a objetos, es útil en la formación del estudiante.

Después de haber explicado este dispositivo hay que decir cómo se va a utilizar el dispositivo de la forma $T^{\square}_{\square}\,T^{\square}_{\square}\,T^{\square}_{\square}\,T^{\square}_{\square}\,(\qquad)$ (que se llenó en la etapa anterior) para completar el dispositivo de la tercera etapa.

Las preguntas orientadoras son : ¿Por dónde comenzamos?. ¿Qué ponemos encima de la primera flecha?...etc. Para comenzar se grafica la tecla que estaba en el paréntesis grande. Y luego se deben aplicar, de derecha a izquierda las transformaciones que están especificadas. Cada transformación es un paso, etc,

ESCENA 10

<u>Pizarra</u>



Transformaciones aplicadas y su orden	$T_{\square}^{\square}(G(\quad))$	$T_{\square}^{\square}(G(\quad))$	$T_{\square}^{\square}T_{\square}^{\square}(G(f))$
$Ln(\quad)$			

<u>Libro : 8-29</u>

<u>Actividad (3 minutos, pupitre)</u>

Hacer este ejercicio.

<u>Comentario</u>

Los alumnos tienen dificultades en distinguir la fórmula de una curva de la expresión $T_{\square}^{\square}T_{\square}^{\square}(G(f))$ que define las operaciones hechas con una curva inicial para llegar a la curva que se está viendo. Este ejercicio es para afinar en esa distinción.

Es más frecuente que llenen correctamente $T_{\square}^{\square}T_{\square}^{\square}(G(f))$ a que den la fórmula correcta. La fórmula correcta sale de la aplicación reiterada de las reglas de asignación de nombre (ver Página 8-25).

FASE FINAL

ESCENA 11

<u>Pizarra</u>

Estudio de la familia de curvas dadas por $Me^{-\lambda t}$, con $\lambda > 0$.

<u>Libro : 8-23</u>

<u>Actividad (Pizarra, 3 minutos)</u>

Se puede hacer el ejemplo más sencillo, donde $\lambda = M = 1$. Luego estudiar la influencia del parámetro M. Hacer notar que el punto de corte con el eje y se altera, no así la asíntota horizontal. Luego estudiar la influencia del parámetro λ. Es conveniente hacer uno de los gráficos e interpretar la altura en t, como la masa de elemento radioactivo en el tiempo t. Hablar del tiempo de vida medio t_m, como aquel tiempo que satisface la ecuación: $Me^{-\lambda t_m} = \frac{M}{2}$.

<u>Comentario</u>

Los que tengan tiempo y conozcan el punto pueden hablar de las pruebas de carbono catorce.

CLASE 20

VISION GLOBAL

El objetivo de esta clase es el de introducir actividades sobre las curvas que tienen que ver con la noción de límite. Esto incluye la producción, a partir de una curva, de simbología del tipo $\underset{x \to a}{Lim}\, f(x)$.

Esencialmente se trata de estudiar la flecha

$$Curva\ de\ f \longrightarrow \underset{x \to a}{Lim}\, f(x)$$

La primera parte de este estudio cubre las páginas 9-1 a 9-6 (inclusive).

La segunda parte que consiste en la construcción de curvas que cumplen unas especificaciones dadas utilizando notación del tipo $\underset{x \to a}{Lim}\, f(x)$, va de la página 9-7 a la 9-8 (inclusive).

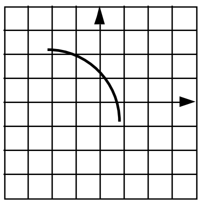
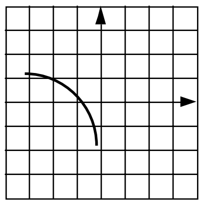
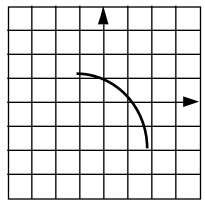
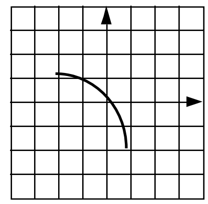
La página 9-9 es una aplicación de la primera parte a algunas de las curvas de las teclas elementales. Es un paso necesario para la utilización del diagrama en el cálculo de límites.

La página 9-10, que se debería de dar en la Fase Final, inicia el cálculo de límites de fórmulas.

FASE INICIAL

ESCENA 1 :

Pizarra

			
Transformaciones aplicadas y su orden	$T^{\square}_{\square}T^{\square}_{\square}(G(f(\ )))$	$T^{\square}_{\square}T^{\square}_{\square}(G(f(\ )))$	$T^{\square}_{\square}T^{\square}_{\square}(G(f(\ )))$
$f(\ )$			

Libro 8-28:

Actividad (5 minutos, pupitre)

Comentario

ESCENA 2:

Pizarra

Graficar $|Ln(Sen(|x|+1))|$

Libro 8-48

Actividad (Pupitre y pizarra, 10 minutos)

Sugerirles al plantear el ejercicio que lo primero que deben hacer es el diagrama de la fórmula. Es probable que la parte que esté más verde sea la del segundo dispositivo. Hay que moverse bastante entre los pupitres para que no pierdan demasiado tiempo en esta actividad y que se vayan aclarando las dudas.

Comentario

Es conveniente, para agilizar este ejercicio, ir preguntando al comienzo de la actividad, cuales son las pasos a seguir. Preguntas del tipo ¿Qué es lo primero que hay que hacer?, etc.

En esta actividad hay algo que es nuevo : deberán aplicar $T^{V}_{Ln(\ )}$. Como no ha sido estudiada a estas alturas deben explorar con el mecanismo básico de los caminos qué es lo que hace esta transformación. En particular ¿qué pasa con las alturas negativas? y ¿qué pasa con las alturas entre cero y 1? ¿qué pasa con los puntos de altura 1? etc. Esta transformación se estudia en 8-32.

FASE MEDIA

ESCENA 3:

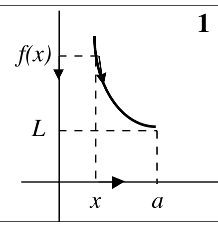
Pizarra,

LÍMITE LATERAL

IZQUIERDO

$(x \to a)^{-}$

1



$f(x)$ tiende a L por encima cuando x tiende a a por la izquierda

$$\lim_{(x \to a)^{-}} f(x) = L$$

Libro 9-1

Actividad (Pizarra, 5 minutos)

Se trata de introducir la lectura en las curvas, de aspectos (de ellas) relacionados con la noción de límite. Es pasar de la curva a cierta notación inicial (de límites). No se trata de dar definiciones ni formales ni intuitivas de los límites. Esta situación se parece mucho a la del comienzo del capítulo 1. En el caso que nos ocupa, en vez de decidir, viendo una curva, sobre propiedades de crecimiento, máximos, partes positivas, etc, se trata de decidir sobre los límites. Esto, al igual que en el capítulo 1 se hace dando un procedimiento claro para el alumno (recuerde el muñequito subiendo por la curva o caminando sobre los ejes, etc). En este caso se trata de mover simultáneamente (de manera sincronizada) tres puntos: uno sobre el eje x, otro que le corresponde en la curva y finalmente el correspondiente en el eje y.

Para ello, a veces, resulta útil poner explícitamente las flechas que indican el movimiento. Es esa configuración con flechas las que es traducida al lenguaje simbólico en expresiones de la forma $\underset{(x \to a)^-}{Lim} f(x) = L$.

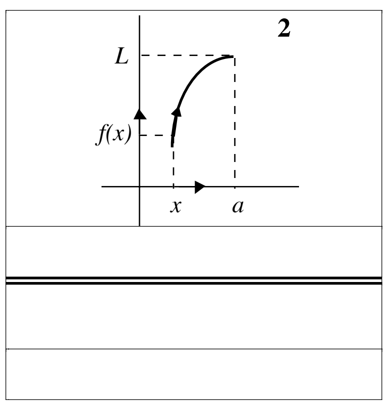
Comentario

Se ha notado que a pesar de la sencillez aparente, existe un grupo de alumnos que no capta claramente el movimiento de las flechas. Por ello conviene, en la exposición, explicar que en cada caso (curva o eje), la flecha tiene sólo dos sentidos posibles y que dado el sentido sobre el eje x, se puede saber el sentido sobre la curva o sobre el eje y.

Esta actividad tiene poco que ver con la definición de límite. La definición de límite se puede estudiar en un curso posterior, cuando el alumno ha aprendido una serie de preámbulos necesarios.

ESCENA 4:

Pizarra



Libro 9-1

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

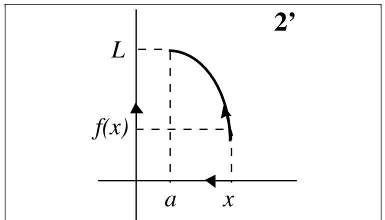
Hacer el ejercicio.

Comentario

Ejercicio para dar al alumno la oportunidad de fijar parcialmente la nueva notación.

ESCENA 5:

Pizarra



Libro 9-1

Actividad (Pizarra y Pupitre, 3 minutos)

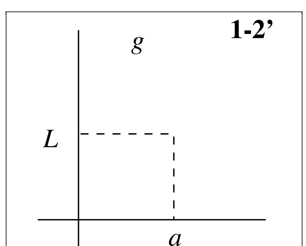
Comentario

El objetivo de la actividad es plantear la existencia de los límites laterales. Conviene hacer preguntas del tipo: ¿Qué significa lateral?¿Porqué unos se llaman "límite lateral izquierdo" y otros límite "lateral derecho"? ¿En qué radica la diferencia? ¿La derecha e izquierda, con respecto a quién se está considerando?

¿Cómo diferenciar en la escritura el límite lateral derecho del izquierdo?

ESCENA 6:

Pizarra



$\underset{(x\to a)^-}{Lim}\ g(x) =$

$\underset{(x\to a)+}{Lim}\ g(x) =$

$\underset{x\to a}{Lim}\, g(x) =$

Tiende por encima y por debajo

Libro 9-2

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

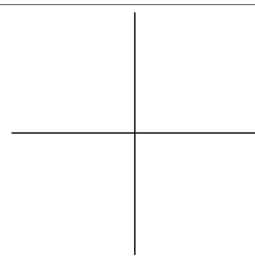
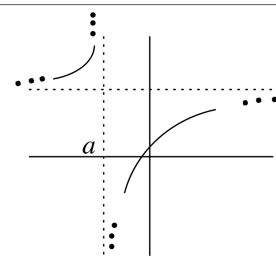
Completar la forma.

Comentario

Debe utilizar la página anterior para saber quien es 1-2'.

ESCENA 7:

Pizarra

Valor de Estudio	$x \to a$
	
L. L. Derecho	$-\infty$
L. L. Izquierdo	∞
Razón	$A) \quad 1) \quad ii)$
Límite	$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *no existe*

Libro 9-3

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

Ayudar a leer al estudiante esta parte del libro.

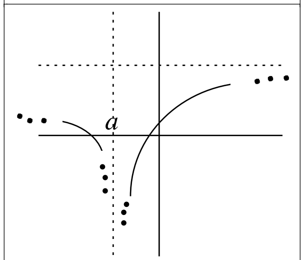
Comentario

Se trata de presentar la noción de existencia de un límite. Y cómo se llenan los cuadros del ejercicio. Es el paso de los límites laterales a la noción de límite en un punto.

Lo que se quiere es que el alumno domine la "reglamentación" que permite afirmar (o negar) que el límite existe.

ESCENA 8:

Pizarra

$x \to a$


Libro 9-3

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

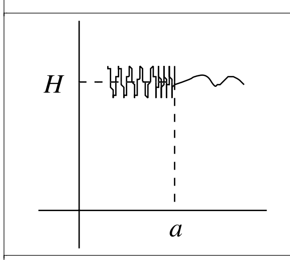
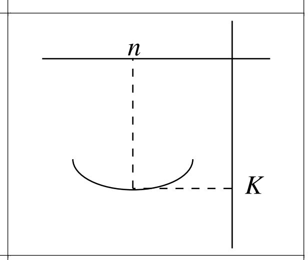
Completar la forma.

Comentario

Fijación de las ideas introducidas en la actividad anterior.

ESCENA 9:

Pizarra

$x \to a$	$x \to n$
	
no existe	

Libro 9-3

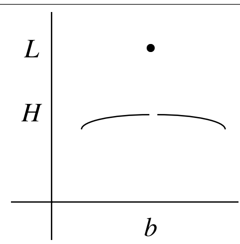
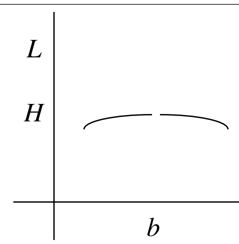
Actividad (Pupitre, 3 minutos)

Comentario

Fijación de ideas de las actividades anteriores. En caso de prisa se puede obviar esta actividad.

ESCENA 10:

Pizarra

$x \to b$	$x \to b$
	
ojo!	ojo!

Libro 9-4

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

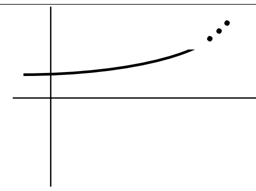
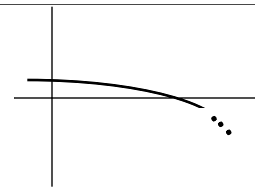
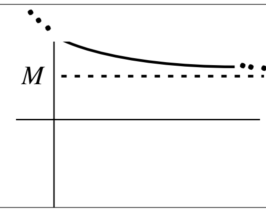
Comentario

Estos ejercicios son importantes para la noción de continuidad de funciones. Es probable que en las clases sucesivas tenga que acudir a ellos.

En la cuarta edición del libro la página 9-4 reaparece (por error) en la página 9-12.

ESCENA 11:

Pizarra

		
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$	
Por debajo		*Por encima.*

Libro 9-5

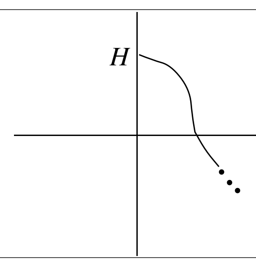
Actividad (Pizarra y pupitre, 3 minutos)

Comentario

Se trata de introducir la noción del límite de una curva cuando x tiende a infinito. Aparece la noción de asíntota horizontal.

ESCENA 12:

Pizarra


$\lim\limits_{(x \to 0)^+} f(x) = H$ por debajo
$\lim\limits_{(x \to 0)^-} f(x) =$
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$

Libro 9-6

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

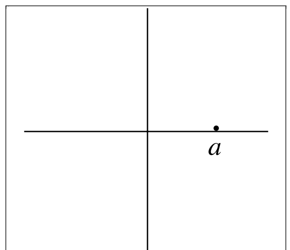
Completar la forma

Comentario

Esta actividad combina todo lo anterior. El alumno puede constatar que los "límites de una curva" pueden ser estudiados en muchos puntos (el a al cual tiende el x, es arbitrario).

ESCENA 13:

Pizarra



$$\lim_{(x\to -a)^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{(x\to -a)^-} f(x) = \infty$$

Libro 9-7

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

Dibujar una curva que cumpla las especificaciones indicadas en los recuadros.

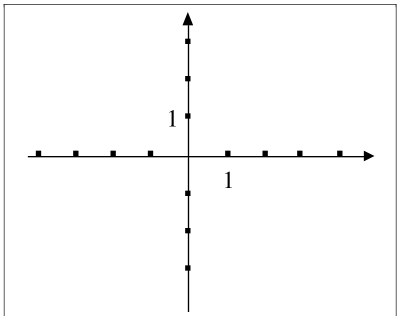
Comentario

Esta es la primera actividad de inversión en el capítulo. Hasta ahora se trataba de ver la curva para construir la expresión simbólica que envuelve la notación de límites. Ahora se trata, a partir de la notación, construir una curva. Este ejercicio no es trivial para los alumnos.

Esta actividad está íntimamente ligada con la graficación de funciones utilizando derivadas y límites. Se ha notado, en cursos anteriores que sin esta actividad hay estudiantes que pueden llegar a calcular límites sin saber, luego expresar los resultados con una curva apropiada.

ESCENA 14:

Pizarra



$$\lim_{(x\to 0)^-} e^x =$$

$$\lim_{(x\to 0)^+} e^x =$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x =$$

$$\lim_{x\to \infty} e^x =$$

Libro 9-9

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

Comentario

Esta actividad no es novedosa. Tiene la función de atraer la atención del alumno de que las curvas del alfabeto también pueden ser miradas bajo el ángulo de los límites.

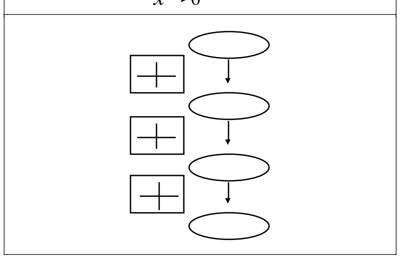
Por otro lado, esta es una actividad útil (e indispensable) para el cálculo de los límites a partir de las fórmulas (utilizando o no diagramas).

FASE FINAL

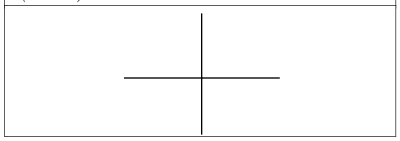
ESCENA 15:

Pizarra

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}}$$



$$\lim_{(x\to\ \ )^-} \quad =$$
$$\lim_{(x\to\ \ )^+} \quad = ,$$
$$\lim_{(x\to\ \ )} \quad =$$



Libro 9-10

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

Explicar la forma completada que aparece en el libro.

Comentario

Se trata de iniciar el estudio de los límites a partir de las fórmulas.
El dibujo final debe ser una curva que cumple con los límites obtenidos. No debe ser el gráfico de toda la fórmula a la cual se le calculó el límite en cero.
En principio esta actividad debe ser retomada en la clase siguiente.
Existen dificultades en los alumnos para que entiendan el uso de las teclas gráficas para poner los seudo-números. (Conviene hacerlo en grande). Es bueno hacerles notar que lo que, en un diagrama, juega el papel de y para una tecla, juega el papel de x para la siguiente.
Esta actividad sigue haciendo profundizar al alumno en la relación camino-diagrama.

CLASE 21

VISION GLOBAL

Con el objeto de dar posibilidades al estudiante para profundizar en los contenidos del Capítulo 8, la fase inicial de esta clase incluye actividades de ese capítulo.

En cuanto a límites la clase debe apuntar a tres objetivos básicos :

> El primero es el de la utilización del diagrama de la fórmula para calcular límites de fórmulas.
>
> El segundo es el de la noción de función contínua. Esto debe ir acompañado de funciones definidas a trozos.
>
> El último aspecto es el de introducir la sustitución ingénua y los límites de tipo "indeterminado" . (que son aquellos donde la sustitución ingénua no funciona inmediatamente)
>
> .

FASE INICIAL

ESCENA 1

Pizarra

Grafique $y = e^{-x^2}$

Libro : 8-42

Actividad (15 minutos, pizarra, pupitre o consulta individual)

Graficar la fórmula e^{-x^2}, de tres maneras distintas. (Comenzando por cada una de las tres teclas de su diagrama)

Comentario

A estas alturas todavía el tema de transformaciones se está asimilando. La actividad planteada exige estudiar $T^V_{e(\ )}$ y $T^H_{(\ )^2}$. Esta última se parece a la horizontal del valor absoluto y se estudia en 8-38. La transformación $T^V_{e(\ )}$ se estudia en 8-30.

La fórmula e^{-x^2} es muy importante en probabilidades porque es la base de la gaussiana (densidad de la normal). En la página 8-44 se hace el trabajo de a partir de e^{-x^2} graficar cualquier fórmula de la familia de las gaussianas.

ESCENA 2

Pizarra

Graficar $\left|Ln\left(|\quad|\right)\right|$

Libro : no figura

Actividad (4 minutos, pupitre)

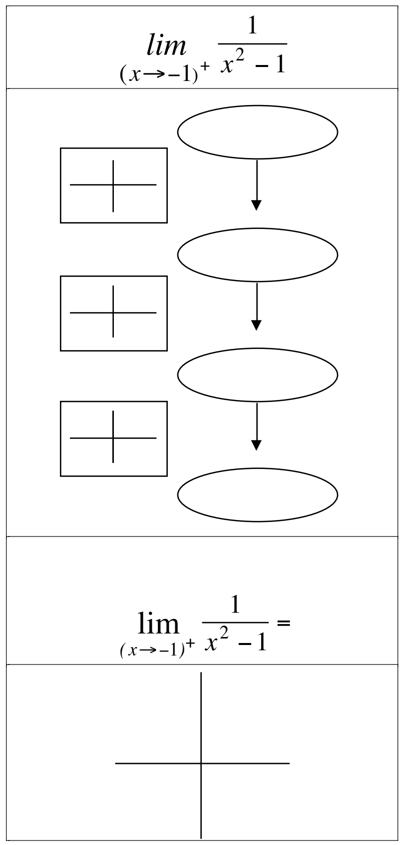
Comentario

La intención de este ejercicio es hacer aparecer en una sola situación las dos transformaciones del valor absoluto, para ayudar al estudiante a distinguirlas y a no caer en automatismos (se ha observado que apenas ven el valor absoluto piensan en la transformación vertical, sin pararse a considerar en qué posición está el valor absoluto en la fórmula).

FASE MEDIA

ESCENA 3

Pizarra



Libro : 9-10

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

Explicar "cómo se llenó" en el libro.

Comentario

Note que en la primera clase de límites el trabajo giró alrededor de la "estimación visual" de límites de curvas. El cálculo (ya no estimación) de límites de fórmulas es de una naturaleza muy diferente. Uno de los instrumentos para ese cálculo es el diagrama de la fórmula y los pseudonúmeros.

En la fase final de la clase anterior se hizo el primer ejemplo de una serie de tres ejemplos que aparecen en la página 9-10. El objetivo es refrescar, con otro ejemplo, la última escena de la clase pasada.

El manejo del algoritmo de cálculo de límite con el diagrama pareciera expedito. Sin embargo, hay alumnos que no ven porqué se comienza con un número específico : hay que señalarles que ese número es justamente hacia el cuál tiende el x en la expresión $\underset{x \to a}{Lim} f(x)$.

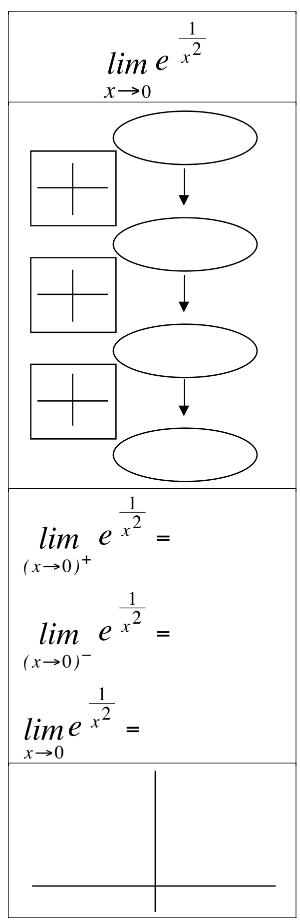
Otro aspecto en el cual vale la pena tomarse su tiempo es para entender que el pseudonúmero que aparece antes de una tecla debe situarse en el eje x. Y mostrar que el pseudonúmero que va en la pantalla que sigue a una tecla, debe leerse en el eje y de la tecla y viene siendo la "imagen" del pseudonúmero del eje x. A veces es conveniente trabajar con tizas de colores.

En general el algoritmo es fácilmente asimilado. Lo que los alumnos no entienden es que han calculado un límite. Esto en general exige cierta madurez. Los ejercicios de la Página 9-13 apuntan a esa madurez.

Finalmente algunos de los ejercicios de la página 9-14 y 9-15, como bien lo indica la nota de la página 9-15 tienen por objeto enfrentar a los alumnos con el fenómeno de la indeterminación.

ESCENA 4

<u>Pizarra</u>



Libro : 9-11

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

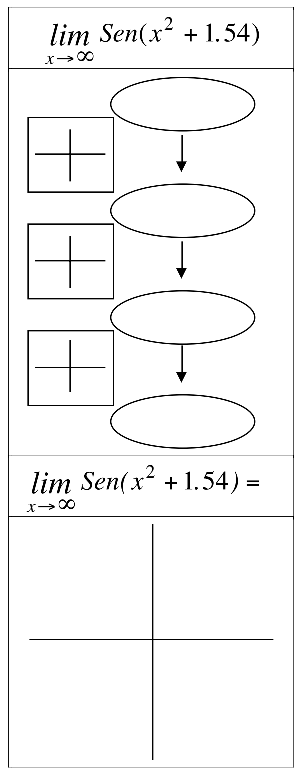
Hacer el ejercicio

Comentario

Asentar lo que se explicó en la escena anterior.

ESCENA 5

Pizarra



Libro : 9-11

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

Comentario

Aquí el problema es que el límite no existe porque la función oscila entre -1 y 1.

ESCENA 6

Pizarra

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x^2 - 9}$	$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e}{x^2 - 4}$	$\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1}{Sen(x) - 1}$	$\lim\limits_{x \to \infty} Sen(\dfrac{1}{x^2})$

Libro : 9-12

Actividad (Pupitre, 2 minutos)

Copiar los ejercicios de la pizarra.

Comentario

Inexplicable y lamentablemente la página 9-12 de la cuarta edición es una repetición de la página 9-4. La verdadera página es la que sigue. El error no afecta conceptualmente el curso. Sólo elimina del libro cuatro ejercicios de cálculo con diagramas. Al copiar su enunciado en la pizarra, está subsanando parcialmente esa deficiencia.

VERDADERA PAGINA 9-12 (no vale la pena copiarla en la pizarra).

Para completar, tome en cuenta el final de la página anterior.

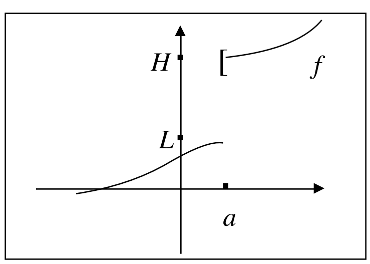
$\lim\limits_{x \to \infty} Sen(x^2 + 1.54) =$	$\lim\limits_{x \to -\infty} Sen(\dfrac{1}{x^2}) =$	$\lim\limits_{x \to -\infty} Sen(\dfrac{1}{\sqrt{x}}) =$ ojo!	$\lim\limits_{(x \to 0)^+} Sen(\dfrac{1}{x^2}) =$ ojo!

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x^2 - 9}$	$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e}{x^2 - 4}$	$\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1}{Sen(x) - 1}$	$\lim\limits_{x \to \infty} Sen(\dfrac{1}{x^2})$

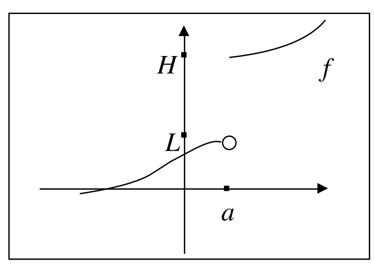
$\lim\limits_{(x\to 3)^-} \dfrac{1}{x^2-9} =$ $\lim\limits_{(x\to 3)^+} \dfrac{1}{x^2-9} =$ $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x^2-9} =$	$\lim\limits_{(x\to 2)^-} \dfrac{e}{x^2-4} =$ $\lim\limits_{(x\to 2)^+} \dfrac{e}{x^2-4} =$ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e}{x^2-4} =$	$\lim\limits_{(x\to \pi/2)^-} \dfrac{1}{Sen(x)-1} =$ $\lim\limits_{(x\to \pi/2)^+} \dfrac{1}{Sen(x)-1} =$ $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1}{Sen(x)-1} =$	$\lim\limits_{(x\to \infty)^-} Sen\left(\dfrac{1}{x^2}\right) =$ $\lim\limits_{(x\to \infty)^+} Sen\left(\dfrac{1}{x^2}\right) =$ ojo! $\lim\limits_{x\to \infty} Sen\left(\dfrac{1}{x^2}\right) =$

ESCENA 7

<u>Pizarra</u>



o



<u>Libro : 9-17</u>

<u>Actividad (3 minutos, pizarra, pupitre)</u>

Contestar y comentar las preguntas del final de la página.

<u>Comentario</u>

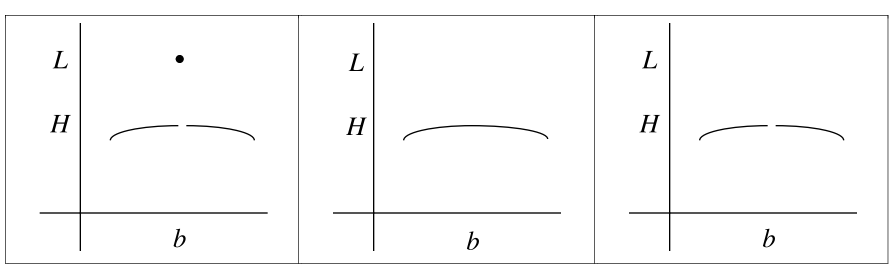
La noción de continuidad es difícilmente tratable en un curso de cálculo. Disponemos de las fórmulas y de las curvas. Y es sobre estos objetos que debe ser ejercitada la noción de continuidad.
Poner en evidencia la noción de continuidad cuando se trata de curvas, pareciera no ser muy difícil. Sin embargo, hay problemas porque el fenómeno a veces se confunde con el de "desconexión". Evidentemente, en la topología habitual de la recta, una curva que es discontínua en un valor es también disconexa. Pero lo contrario no es cierto.

Esto ha obligado a poner dos conjuntos de definiciones en juego :

> Por un lado, en el plano cartesiano las convenciones para saber si un extremo de un trazo está o no incluido en la curva representada por el trazo. Estas convenciones se explican al comienzo de la página.
> Por otro lado están las nociones en castellano para disponer de un léxico que permita diferenciar entre disconexa y discontínua. Esto ha obligado a introducir la noción de ruptura.

Las preguntas de las páginas 9-17 y 9-18 van dirigidas a considerar la posibilidad de que el límite sea igual a la evaluación de la función. El ejemplo de la página 9-17 es un ejemplo donde esto no es cierto porque el límite no existe. La página 9-18 ofrece toda una gama de posibilidades.

ESCENA 8
Pizarra



Libro : 9-17 y 9-4

Actividad (Pizarra, 3 minutos)
Contestar las preguntas
¿En cuales casos el límite en b existe?

¿En cuales casos es cierto que $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$?

Comentario

Es conveniente hacerles las preguntas, a los estudiantes, desde la pizarra.

ESCENA 9

Pizarra

Libro : 9-18 y 9-19

Actividad (5 minutos, pupitre y pizarra)

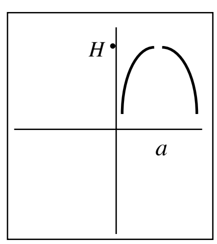
Que los alumnos contesten rápidamente algunas preguntas de la página 9-18. Que el profesor dé las definiciones contenidas en la página 9-19.

Comentario

En la página 9-19, la noción de continuidad es tratada mediante la "institucionalización" de la actividad realizada en la página 9-18.

ESCENA 10

Pizarra



Libro : 9-21

Actividad (3 minutos, pizarra)

Explicar la página.

Comentario

El contenido de la página 9-21 no suele aparecer en los libros de cálculo. Se incluye en Métodos de Graficación, para ser consistente en la idea subyacente al texto : en la medida de lo posible dar un tratamiento simétrico entre curvas y fórmulas. Además, es lo que está subyacente a los límites indeterminados de funciones racionales, cuando x tiende a una raíz común a los dos polinomios de la fracción (numerador y denominador).

ESCENA 11

Pizarra

Una función f tiene una *ruptura evitable en* a si y sólo si

$$-\infty < \lim_{(x \to a)^+} f(x) = \lim_{(x \to a)^-} f(x) < \infty$$

pero

$f(a)$ no existe.

Una función f tiene una *discontinuidad evitable en* a si y sólo si

$$-\infty < \lim_{(x \to a)^+} f(x) = \lim_{(x \to a)^-} f(x) < \infty$$

$f(a)$ sí existe, pero

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a).$$

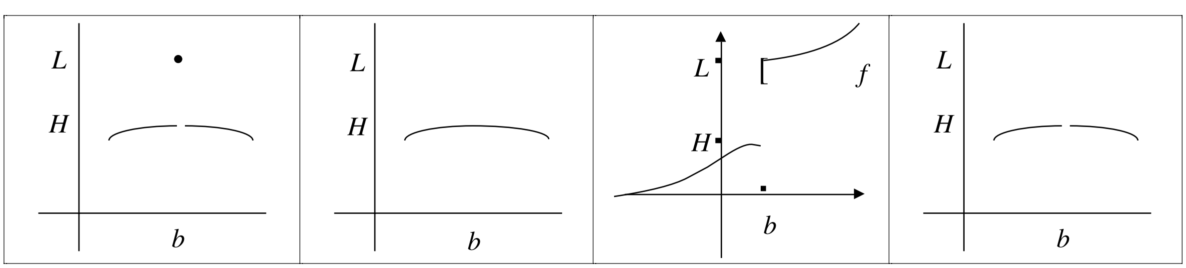
Libro : 9-22

Actividad (3 minutos, pizarra)

Ayudar a leer esa parte de la página. Se puede preguntar en qué se parecen las dos definiciones y luego en qué se diferencian.

Comentario

Puede, para terminar esta actividad, hacer las gráficas que siguen y preguntar cuáles cumplen alguna de las dos definiciones

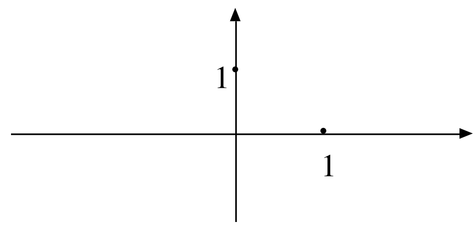


No borre estos gráficos porque se utilizarán en la escena 13.

ESCENA 12

Pizarra

$$f(x) = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x^2 & si\ x \in [0,1] \\ Sen(x) & si\ x \in (1, \pi/2] \end{cases}$$



Libro : 9-25

Actividad (3 minutos, pizarra)

Hacer la gráfica ayudado por los alumnos.

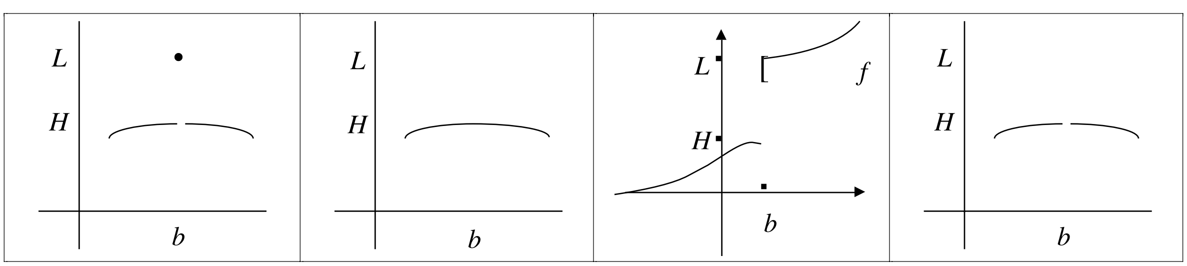
Comentario

La función definida a trozos es una noción relativamente fácil para nuestros estudiantes. No vale la pena insistir en ella en la clase de teoría, salvo esta escena.

ESCENA 13

Pizarra

$$\lim_{x \to b} f(x) = f(\lim_{x \to b} x)$$



Libro : 9-28

Actividad (3 minutos, pizarra)

Preguntar en cuales de los gráficos , se cumple $\lim_{x \to b} f(x) = f(\lim_{x \to b} x) = f(b)$

Comentario

Estos ejemplos son importantes para que los estudiantes vayan entendiendo el alcance de la igualdad que sirve para definir la continuidad en un valor.

Debido a que para muchas fórmulas se tiene que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x)$, el primer intento para calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ es calcular $f(\lim\limits_{x \to a} x)$. (sin saber si ambas expresiones son iguales para el caso que se está calculando). Ese primer paso es lo que llamaremos "la sustitución ingénua".

Las funciones contínuas son aquellas para las cuales el cálculo de límites es fácil. Esto podría ser una razón para el espacio que ocupan en el curso de cálculo. El cálculo de límites en un número donde una función es contínua es inmediato : basta con evaluar la función en el número. Esto es una consecuencia inmediata de la definición de continuidad. Ese acto de evaluación de la fórmula en el número o si se quiere ver de otra manera, de sustitución de la letra que designa la variable en la fórmula, por el valor del número al cual tiende la variable, es lo que llamamos sustitución ingénua. En el libro MG se explica la razón para esa terminología. La sustitución ingénua es una noción que no se explicita en los libros habituales de cálculo, pero que es utilizada sistemáticamente para resolver límites.

La organización de los cursos de cálculo actuales es curiosa : se estudia la continuidad como concepto importante pero el estudio de cálculo de límites de fórmulas está centrado en límites en valores de la variable que no forman parte del dominio de la fórmula, generalmente valores que están al borde del dominio (y por lo tanto valores donde la función no puede ser contínua, por no estar definida en el valor).

Una posible razón para esa curiosa configuración del tema es la creencia, muy extendida entre los profesores, de que la habilidad de cálculo de límites de fórmulas está relacionada de algún modo con el aprendizaje de las matemáticas. Entre las ideas dominantes del medio están "la matemática es difícil" y "en la medida en que algo es más difícil es más matemático". Los límites que exigen para su resolución el conocimiento de ciertos trucos y que en esa medida se convierten en obstáculos casi infranqueables para los que desconocen el truco, aparecen o se erigen, para los detentores de esa ideología, en auténticos exponentes de lo que es matemática.

Es probable que la habilidad de cálculo de límites tenga que ver con cierta capacidad de manejo simbólico, que siempre es útil en los estudios de matemáticas. Sin embargo, hay poca relación entre un hábil calculador de límites y una persona capaz de hacer demostraciones y menos aún, capaz de estudiar la noción de límite en el cuadro de la topología.

Por ello el tema del cálculo de límites, en Métodos de Graficación, ha sido acotado : se trata de facilitar el estudio de un conjunto variado de técnicas elementales de cálculo de límites de fórmulas con el objeto de cubrir necesidades futuras y de mejorar las habilidades de manipulación simbólica de nuestros estudiantes. Pero no se quiere extender el tema con el objetivo de convertir a nuestro estudiante en un virtuoso de la resolución de límites.

Una pregunta se impone : si los límites que se piden calcular son justamente aquellos para los cuales la sustitución ingénua no produce un resultado claro, (rara vez va a un examen un límite que se obtiene por sustitución ingénua.) ¿por qué utilizarla? . La respuesta a esta pregunta es fácil : la sustitución ingénua proporciona información del tipo de indeterminación en que se está. Y esto sirve para saber (muy frecuentemente) qué manipulaciones algebraicas hacer con la fórmula para cambiarle su forma y poder recalcular el límite o bien para acotar el límite o para "ensanduicharlo".
Si se piensa a la SI (sustitución ingénua) como una función, el conjunto de llegada de dicha función sería los "tipos de indeterminación". Es decir :

$$\lim_{x \to a} f(x) \xrightarrow{SI} \textit{Indeterminación}$$

Estos tipos tampoco son objetos matemáticos. Y no se pretende que lo sean. Pero son objetos necesarios para enfrentar el problema del cálculo del límite. Y además, forman parte de la jerga establecida. Desde ese punto de vista, pareciera muy conveniente manejar esa noción de manera explícita. Como parte del discurso escrito de clase. Este es el objetivo de la Página 9-31: mostrar explîcitamente diferentes tipos de indeterminaciones.
Desde el punto de vista de la escritura formal de la matemática tiene sentido que no haya espacio en los textos dedicado a la sustitución ingénua, pero desde el punto de vista didáctico trae graves consecuencias.

ESCENA 14

Pizarra

Libro : 9-31

$$\lim_{x \to \infty} x^{15} - 3x^{12} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{Sen(x)}{x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{Cos(x) - 1}{x} =$$

$$\lim_{x \to \infty} x^{15} + 3x^{12} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 1)Sen(x)}{x} =$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{Sen(x)}{x} =$$

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

Primero hacer la sustitución ingénua para cada una de las fórmulas.
Se puede comparar los resultados con los tipos de indeterminación que aparecen en la Página 9-31.

Comentario

Esto es una primera aproximación a la indeterminación.
La intención de esta actividad es hacer aparecer la noción de indeterminación : para ello hay que hacer ver que algunas expresiones que resultan de la sustitución ingénua, a pesar de involucrar el símbolo ∞, pueden ser procesadas. Mientras que otras producen dudas. Se ha escogido deliberadamente ejemplos donde muy pequeñas diferencias en las fórmulas influyen en el hecho de que dé indeterminado o no.

FASE FINAL

ESCENA 15

Pizarra

Lo completado de la escena anterior

Libro : 9-31

Actividad (Pizarra, 2 minutos)

Tratar de contestar a la pregunta ¿Qué se hace cuando se llega a una indeterminación?
La respuesta es "levantar la indeterminación".

Comentario

Se debe indicar que cada tipo de indeterminación suele tener una técnica específica para tratarla. En general se tiene :
Lo que se hizo en la escena anterior es :

$$\lim_{x \to a} f(x) \xrightarrow{SI} Indeterminación$$

Levantar la indeterminación es en general hacer :

$$Indeterminación \longrightarrow L$$

Muy frecuentemente esta útlima flecha se descompone en dos :

$$Indeterminación \xrightarrow{\text{Cambio de forma}} f(x) = g(x)$$

y

$$\lim_{x \to a} g(x) \xrightarrow{SI} L$$

Pero como se verá en la próxima clase esta es sólo una de las maneras de levantar indeterminaciones.

CLASE 22

VISION GLOBAL

Esta clase es la dedicada a la enseñanza de la resolución o cálculo de límites de fórmulas. No se pretende ser exhaustivo. La sustitución ingénua es indispensable para que el alumno no aplique a ciegas cierta técnica. Para que no la aplique sin saber si realmente es pertinente al problema.

Esta clase debería cubrir cuatro técnicas diferentes de resolución de límites y en particular de "levantamiento de la indeterminación". Cada una es interesante per se y encierra dificultades que el estudiante debe aprender a vencer. Para cada una de estas técnicas se dedican, en esta clase, unas tres o cuatro escenas. Las técnicas son :

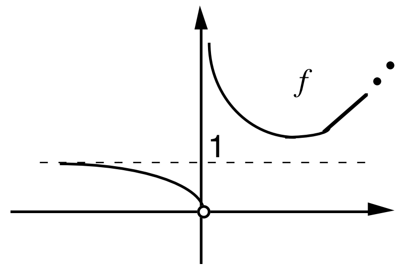
1- Polinomios y funciones racionales. Pág 9-32 a 9-44. Fundamentalmente algebraica.
2- Oscilantes 9-46 a 9-57. Incluye sandwuch. Comparación con otras funciones.
3- Ordenes de magnitud 9-57 a 9-61. Comparación entre teclas de la fórmula para poder llegar a una conclusión.
4- Caso de finito/ cero 9-61 a 9-66. Estudio de límites laterales.

Métodos de Graficación contempla también el estudio de límites con indeterminaciones de la forma 0/0. Estos límites incluyen: los límites notables y los que se resuelven por conjugados. Debido a la escasez de tiempo y al hecho de que estos límites son muy fácilmente resolubles utilizando la Regla de l'Hôpital, conviene mejor tratarlos en el segundo semestre. Sin embargo, en caso de que haya tiempo, la clase 23 ha sido diseñada para enseñar ese tipo de límites sin el uso de la Regla de L'Hôpital.

FASE INICIAL

ESCENA 1

Pizarra



Realizar la sustitución ingénua (Para determinar el límite o el tipo de indeterminación)	Límite o tipo de indetermi nación
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-3=$	
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-3f(x)=$	
$\lim\limits_{x\to\infty} f^2(x)-3f(x)=$	

Libro : 9-32

Actividad (Pizarra, 3 minutos y pupitre 2 minutos)

Completar parte de la tabla. Comentar sobre las indeterminaciones. Pasar a la tabla del comienzo de 9-33 y ver se levanta la indeterminación de $\lim\limits_{x\to\infty} f^2(x)-3f(x)=$

Comentario

En la enseñanza del tema se ha observado que un subconjunto de alumnos reacciona como que creyera que a todos los límites de polinomios se le debe aplicar la "regla rápida" dada en la página 9-35. Pareciera que ven el polinomio y no toman en cuenta hacia donde tiende el x. La organización de las escenas tiene en mente enfrentar ese comportamiento.

La estrategia para enfrentar este problema, comienza por construir una situación, como la planteada en los ejercicios de la página 9-32, donde la fórmula incluye una expresión $f(x)$ de la cual se conoce sólo la gráfica. Y es la información contenida en la gráfica que permite realizar la sustitución ingénua y con ella descubrir si hay indeterminación o no.

Los comentarios que se hacen a los resultados obtenidos por los alumnos deben ir dirigidos a mostrar cuándo un caso es indeterminado y cuándo no. En primer lugar se trata de despejar la impresión de que el hecho de que aparezca un infinito es el que hace que haya indeterminación. Se trata de caracterizar la indeterminación. Porqué cuando se trata de suma de infinitos no es lo mismo que resta de infinitos. Porqué no hay problemas cuando se suma o resta finito de infinito, etc.

ESCENA 2

Pizarra

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - x^3 =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 + x^3 =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 + x^3 =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 - 4x^3 =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 - 4x^3 =$$

$$\lim_{x\to 3} x^2 - x^3 =$$

$$\lim_{x\to 3} x^2 - 3 =$$

Libro : no figura en MG

Actividad (Pizarra, 4 minutos)

Primero determinar cuáles sustituciones ingénuas dan indeterminaciones.

Y luego por comparación de órdenes de magnitud proceder a levantarlas. Hay que mostrar con un pequeño ejemplo que el "crecimiento" de una potencia depende de la magnitud del exponente. Basta con comparar x con x^2 para valores grandes de x.

Comentario

Al dar un conjunto de límites de polinomios se propicia construir una situación en donde el alumno pueda apreciar la necesidad de la sustitución ingénua para precisar si hay indeterminación o no.

ESCENA 3

Pizarra

$$\lim_{x\to-\infty} x^5 + 3x^{12} - 120x + 3 + x^{-150} =$$

Libro : 9-35

Actividad (3 minutos, pupitre, pizarra 2 minutos)

Al tratar de hacer la sustitución ingénua el alumno se enfrenta a varios problemas (debe pensar en potencias pares o impares, tomar en cuenta los signos, etc.). Esto para llegar a la expresión :

$$-\infty + \infty - \infty + 3 + 0$$

Aquí el profesor puede intervenir para cambiarle la forma al polinomio :

$$x^{12}\left(\frac{x^5}{x^{12}} + 3 - 120\frac{x}{x^{12}} + \frac{3}{x^{12}} + \frac{x^{-150}}{x^{12}}\right)$$

Y pedirle a los alumnos aplicar la sustitución ingénua a esta forma.

Comentario

En el libro, en la Página 9-35 aparece una "regla rápida" y una justificación. No conviene darla en clase de teoría. El alumno puede descubrirla si lee el libro o se la pueden dar en la práctica. La regla rápida es una institucionalización del trabajo hecho para levantar la indeterminación. Una institucionalización prematura lleva a nuestros alumnos a sólo tomar en cuenta lo institucionalizado (la regla) y olvidarse de dónde surgió. Esto probablemente propicia el hecho constatado y al que se ha referido más arriba : el alumno tiende a aplicar la regla rápida sin tomar en cuenta hacia dónde tiende la x.

FASE MEDIA

ESCENA 4

Pizarra

$$\lim_{x\to -2}\frac{1-3x^4}{x^2-5}$$

9- 37 $\lim_{x\to \infty}\frac{1-3x^4}{x^2-5}$

9-40 $\lim_{x\to 3}\frac{x+4}{x^2-5x+6}$

9-42 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x+2}$

Libro : 9-37, 9-40 y 9-42

Actividad (8 minutos, pizarra)

Explicar cada caso en detalle. Primero hacer la sustitución ingénua y luego

Comentario

Decir qué es una expresión racional. Un ejemplo son las hipérbolas.

Decir que cada una es un tipo de caso. (La técnica en cada caso va a ser diferente).

Hacer comparaciones entre los tipos de indeterminaciones. El objetivo de hacer esas comparaciones es la de convencer al estudiante que no hay nada a priori que determine el tipo de indeterminación que habrá. La diferencia entre los tipos del primero y el segundo se ve en hacia donde tiende el x. Pero no se puede concluir que el primero no produce indeterminación porque $x \to 2$. Ya que en el cuarto límite también se tiene que $x \to 2$ y sin embargo ahí sí hay indeterminación.

ESCENA 5

Pizarra

9-37 $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{1-3x^4}{x^2-5}$

Libro : 9-37

Actividad (3 minutos, pizarra)

Aplicar a este ejemplo la regla para cocientes de polinomios.

Comentario

Insistir, al comienzo, en ver si la regla se puede aplicar y preguntando quién son n, m, a_n y a_m.
Hacer notar que la conclusión de la página 9-37 es:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots\ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Preguntar ¿en nuestro ejemplo quién es $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$?

Pedir simplificar $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$. Calcular, utilizando la simplificación, $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

ESCENA 6

Pizarra

9-40 $\quad \lim_{x\to 3} \frac{x+4}{x^2-5x+6}$

Libro : 9-40

Actividad (3 minutos, pizarra)

Explicar cómo se levanta este tipo de indeterminaciones.

Comentario

Se trata de ayudar a leer al alumno las páginas correpondientes. Debería quedar claro que :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\cdot \lim_{x\to 3}\frac{x+4}{x-2} = No\ existe \cdot \frac{7}{1} = No\ existe$$

Con un pequeño dibujo mostrar porqué $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3}$ no existe.

Mostrar cómo utilizar la información del dibujo para responder la pregunta (es decir para decir que los límites laterales sí existen y cuanto valen).

No conviene en la clase ponerse a descifrar lo escrito en 9-41.

ESCENA 7

Pizarra

9-42 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x+2}$

Libro : 9-42

Actividad (3 minutos, pizarra)

Aplicar la técnica de factorización de polinomios para el levantamiento de la indeterminación del ejemplo de la pizarra.

Comentario

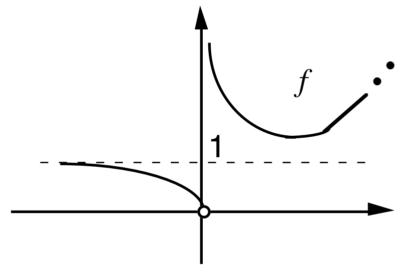
La factorización de polinomios es un problema mucho más amplio que el contexto donde va a ser utilizado. Conviene hacer un corto comentario al respecto. En particular hacer notar que un polinomio es siempre divisible entre $x-\alpha$, si α es raíz de $P(x)$, es decir si $P(\alpha)=0$. Esta afirmación puede ser verificada con los polinomios del numerador y del denominador. (Pregunte quién es α, pida verificar que -2 es "raíz", efectúe la división de x^2+2x-2 entre $x+2$ para constatar que el resto da cero...etc).

Después de factorizado puede recordar que la expresión $\frac{x+2}{x+2}$ fué estudiada en la clase pasada. Conviene recordar su gráfico. Ella es la causante de que el límite no pueda ser resuelto inmediatamente por aplicación de la sustitución ingénua.

ESCENA 8

Pizarra

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot\left(Cos(x)+3\right)$$



Libro : 9-47

Actividad (Pizarra, 3 minutos)

En el caso del ejercicio de esta actividad se debería esbozar rápidamente la parte de la gráfica de $f(x)(Cos(x)+3)$ que corresponde a la derecha del eje x. Porque se está pidiendo calcular el límite cuando $x\to\infty$. Para hacer esto hay que graficar primeramente $(Cos(x)+3)$ y ahí es bien evidente que esa curva debe estar por encima de 2. En ese momento se puede escribir la traducción simbólica de lo que se está afirmando $Cos(x)+3\geq 2$. Luego se puede graficar $2f(x)$. Y preguntar si la parte derecha de la curva de $(Cos(x)+3)f(x)$ va a estar por encima o por debajo de la curva de $2f(x)$. La respuesta a esta pregunta se puede escribir simbólicamente como : $(Cos(x)+3)f(x)\geq 2f(x)$. Luego se puede tomar límites a ambos lados y llegar a la conclusión deseada.

Es evidente que la aparición de las desigualdades puede hacerse sin recurrir al cuadro gráfico. Sin embargo, es importante que los alumnos puedan constatar que esas manipulaciones algebraicas pueden ser motivadas por medio de la observación inteligente de la situación en el plano cartesiano.

Comentario

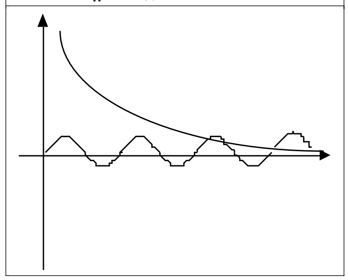
Las funciones trigonométricas en infinito son interesantes porque permiten producir ejemplos donde aplicar propiedades del tipo "límite de la suma igual a la suma de los límites" no puede hacerse. En este tipo de límites a veces el separar en dos límites no es útil, porque el hecho que uno de ellos no exista no implica que el límite no existe. Observe que las propiedades del tipo "límite de la suma (o producto) igual a la suma (o producto) de los límites" son precisamente las que se han aplicado en el levantamiento de los límites de polinomios y de fracciones racionales.

Las técnicas con funciones trigonométricas envuelven la noción de cotas. Esto exige un manejo algebraico que es muy delicado para nuestros estudiantes. El ejemplo típico de estas técnicas es el "teorema del sandwich". Para establecer las cotas las consideraciones de tipo gráfico son bastante útiles.

ESCENA 9

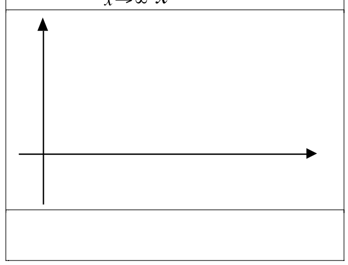
Pizarra

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + Sen(x)$$



y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} Sen(x)$$



<u>Libro : 9-51</u>

<u>Actividad (5 minutos, pupitre)</u>

Hacer los ejercicios.

<u>Comentario</u>

Note que ambos ejercicios están muy relacionados porque las curvas intermedias son las mismas. Sin embargo, las conclusiones son totalmente diferentes. En el primer caso se obtiene que el límite no existe (la curva en infinito se parece mucho a la del seno). En el segundo caso el límite es cero porque la amplitud de las oscilaciones tiende a cero.

Estos dos ejercicios tienden a reforzar lo hecho en la actividad anterior : a partir de consideraciones gráficas obtener el límite. Este tipo de actividades es sólo posible en alumnos que tienen entrenamiento en la graficación rápida y aproximada de curvas. Dicho entrenamiento se obtiene realizando los capítulos anteriores de Métodos de Graficación (sobre todo 2 y cuatro). Estos ejercicios de límites dan sentido a las actividades de esos capítulos.

ESCENA 10

<u>Pizarra</u>

	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 Cos(x)}{3 + x^4}$
Se acota la fórmula que produce la oscilación	$-1 \le Cos(x) \le 1$

	$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 Cos(x)}{3 + x^4} = 0$

Libro : 9-52

Actividad (Pupitre, 3 minutos)

Completar la tabla y con ello explicar la completada que aparece en el libro..

Comentario

La actividad planteada es típica de la aplicación del teorema del sandwich. En general la fórmula suele ser demasiado complicada para graficarla rápidamente. Ello genera las condiciones para desarrollar un procedimiento que no implique o involucre el cuadro gráfico. Pero al mismo tiempo obliga a aclarar cómo proceder en el cuadro algebraico (de las fórmulas). Este nuevo procedimiento es hasta cierto punto una institucionalización de la penúltima actividad. En aquella, las manipulaciones algebraicas venían sugeridas por la observación en el cuadro gráfico. Una orientación análoga al del cuadro gráfico debe ser proporcionada al alumno para trabajar en el cuadro algebraico. Al alumno debe indicársele explícitamente dos cosas :

Cómo comenzar. (Acotar la función oscilante).

Cómo continuar : en general ir modificando las desigualdades con el objeto de que en el "centro "quede la expresión que constituye la fórmula a la que se quiere calcular el límite. Al llegar a tener la fórmula en el medio, se procede a sacar el límite a los tres miembros.

En algunos casos la situación se complica porque hay dos funciones trigonométricas en la misma fórmula. Estos casos es mejor no tocarlos en la primera clase sobre el tema y dejarlos para la práctica o para consultas.

ESCENA 11

Pizarra

e^3 ________, $Ln(3)$ ________, e^{1000} ________y $Ln(1000)$ _______.

Libro : 9-57

Actividad (2 minutos, pizarra)

Hallar los valores con la calculadora y comentar sobre la inmensa diferencia de magnitudes.

Comentario

Esta actividad es de naturaleza diferente a las anteriores. Se trata de que el alumno tome conciencia de los órdenes de crecimiento de una magnitud. Estos órdenes son esenciales en el razonamiento intuitivo sobre las fórmulas, necesario para "calcular" los límites de fórmulas que envuelven fórmulas con diferentes órdenes de crecimiento. Los polinomios son un caso particular de ello. Pero dadas sus características algebraicas, para los polinomios es posible hacer una manipulación algebraica, explicada al comienzo de la clase. Dicha manipulación evita tomar en cuenta explícitamente los órdenes de magnitud de diferentes potencias. En el caso de fórmulas con exponenciales, logaritmos y polinomios "mezclados", esas manipulaciones no son posible. En este caso el razonamiento debe hacerse con los órdenes de magnitud.

ESCENA 12

Pizarra

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2-1} =$	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{Ln(x)}{x^{0.003}} =$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{Ln(x)}{\sqrt{x-1}} =$	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+3} =$

Libro : 9-60

Actividad (3 minutos, pupitre)

Hacer la sustitución ingénua.

Comentario

Todas ellas dan ∞/∞. Pero evidentemente los límites son diferentes.

ESCENA 13

Pizarra

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2-1} =$	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{Ln(x)}{x^{0.003}} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{Ln(x)}{\sqrt{x-1}} =$	$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+3} =$

Libro : 9-59

Actividad (5 minutos, pizarra)

"Calcular los límites".

Comentario

En estos cálculos comienzan las comparaciones entre las diferentes magnitudes. Esta parte les cuesta bastante a los estudiantes porque no hay un álgebra que la respalde. Ni tampoco un trabajo en el plano. Es poco formal pero relativamente efectivo, el calificar ciertas magnitudes como de "grande", "muy grande", "pequeño", "muy pequeño", etc. Con la idea de que "muy grande menos grande sigue dando muy grande", etc. O de preguntar ¿cuál es la magnitud que manda?..etc.

Se puede tratar estos ejercicios usando las reglas de la página 9-59.

Por ejemplo :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2-1}$$

¿Cuál de las reglas de la página 9-59 debe aplicarse?

La regla 3 de la Página 9-59, causa problemas a veces, porque los alumnos no toman en cuenta el valor absoluto : terminan creyendo que el límite de una exponencial entre un polinomio cuando x tiende a infinito es +infinito (independientemente del signo del denominador cuando x se hace muy grande). Hay que insistir que la regla sólo da la magnitud. No dice nada sobre el signo. Para conocer el signo hay que hacer otro razonamiento. En el caso que nos atañe es fácil porque se tiene que los signos son $\frac{+}{+}$ porque el signo del denominador es el de x^2. Y el del numerador es $+$ porque la exponencial es siempre positiva.

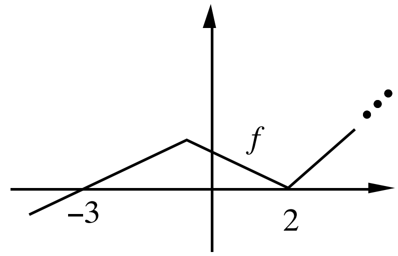
Conviene tratar, con el objeto de aclarar lo del signo, un ejemplo del tipo $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1-x^2-x}$

En este caso el signo del denominador es el de $-x^2$. Y por lo tanto es negativo. Y el límite en vez de dar ∞ da $-\infty$.

FASE FINAL

ESCENA 14

Pizarra



Realizar la sustitución ingénua (Para determinar el límite o el tipo de indeterminación)	Límite o tipo de indeterminación
$\lim_{x \to 2} \frac{1}{f(x)} =$	
$\lim_{x \to -3} \frac{1}{f(x)} =$	

Libro : 9-61

Actividad (3 minutos, pizarra, pupitre)

Resolver estos límites

Comentario

Esta actividad fue parcialmente cubierta en los límites de funciones racionales. Aparece aquí nuevamente porque se ha notado que los estudiantes tienen dificultades para tratar este tipo de casos. Hay que insistir en que cuando se llega a finito/cero, se debe estudiar por la derecha y por la izquierda.

CLASE 23

VISION GLOBAL

Esta clase es para dar el final del Capítulo 9. Trata de un conjunto de técnicas específicas que atañen principalmente límites que tienen que ver con indeterminaciones de la forma $0/0$

Están constituidos principalmente por límites cuya resolución se suele hacer por cambio de variables, a partir de unos básicos llamados notables.
Los otros límites son aquellos que se resuelven mediante el uso de conjugados.

La mayoría de estos límites son tratables con la regla de l'Hôpital. Sin embargo, la aplicación de la regla de L'Hôpital causa confusión en muchos alumnos a estas alturas, porque confunden la regla del cociente con la regla de l'Hôpital. Por ello se prefiere estudiar la regla de L'Hôpital en el segundo semestre.

FASE INICIAL

ESCENA 1

<u>Pizarra</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+4}-2}$$

<u>Libro : 9-66</u>

<u>Actividad (3 minutos, pizarra)</u>

Explicar lo que está en la página. para resolver el ejercicio

<u>Comentario</u>

ESCENA 2

<u>Pizarra</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{-x+1}-1}{\sqrt{-x+4}-2}=$$

<u>Libro : 9-66</u>

<u>Actividad (3 minutos, pupitre)</u>

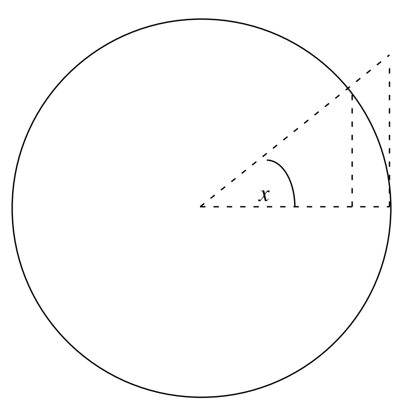
Hacer el ejercicio.

<u>Comentario</u>

FASE MEDIA

ESCENA 3

<u>Pizarra</u>



Libro : 9-67

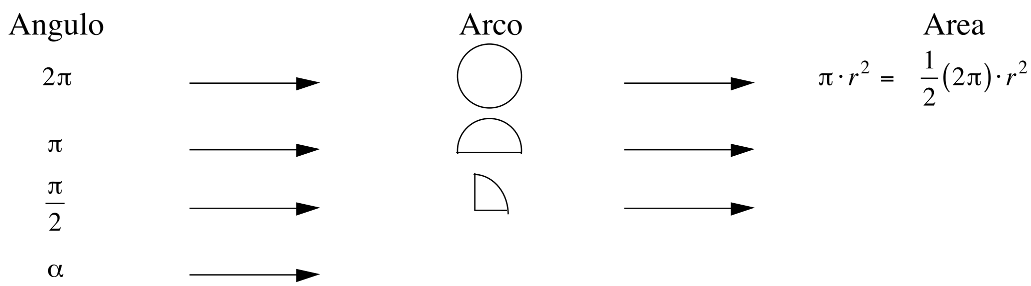
Actividad (5 minutos, pizarra)

Explicar la página.

Comentario

Es conveniente explicar cómo se calcula el área de un arco de ángulo α y de radio r, partiendo del ejemplo mejor conocido que es el área de un círculo de radio r. En ese caso el ángulo α es 2π. Luego se pueden tratar los ejemplos del medio círculo, del cuarto de círculo, hasta darse cuenta que la relación entre el área de una arco y su ángulo es lineal (asumiendo que el radio es fijo). Por ello sale por regla de tres .O bien se puede llegar explícitamente a la fórmula $Area = \frac{1}{2} Angulo * (Radio)^2$.

Una manera de aclarar este comentario es haciendo la tabla :



En el caso que nos interesa el radio es 1 porque se está trabajando con el círculo trigonométrico.

Un punto delicado es la inversión de los signos de orden (las desigualdades) cuando se aplica la tecla $\frac{1}{(\ )}$. El ejercicio de 9-69, permite justificar gráficamente ese cambio. Para ello hay que mostrar que la condición $A < B < C$ implica restricciones en cómo situar esos puntos en el eje x. Y al hacer los caminos de ida que parten de esos puntos se llega a los puntos $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}$ y $\frac{1}{C}$, sobre el eje y. Si se compara las alturas de estos tres puntos se llega a que $\frac{1}{A} > \frac{1}{B} > \frac{1}{C}$. Lo que hay que comparar ahora es $A < B < C$ con $\frac{1}{A} > \frac{1}{B} > \frac{1}{C}$ y hacer notar que las desigualdades se han invertido.

ESCENA 4

Pizarra

$\underset{x \to 0}{Lim} \dfrac{Sen(2x)}{x} =$

<u>Libro : 9-69</u>

<u>Actividad (3 minutos, pizarra)</u>

Explicar lo que está escrito en el libro. Ayudar a leer los pasos.

<u>Comentario</u>

La noción de cambio de variable es delicada. Suele ser presentada como un artificio : en general el cambio se hace explícitamente expresando una función de la variable del límite como otra variable. En el caso del ejemplo se puede hacer $2x = u$. Y luego reexpresar todo lo que tiene que ver con x con expresiones que tienen que ver sólo con u. En este caso sería cambiar x por $\frac{u}{2}$. Pero no suele quedar claro porqué en $x \to 0$, se substituye x por u, en vez de x por $\frac{u}{2}$.

Buena parte de esta manera de proceder se debe a la notación utilizada. La exigencia de poner letra en los espacios en blanco obliga a escribir $\underset{x \to 0}{Lim} \dfrac{Sen(x)}{x}$ en vez de $\underset{(\ ) \to 0}{Lim} \dfrac{Sen(\ )}{(\ )}$. Dado que en el curso hemos utilizado en numerosas ocasiones la "notación $(\ )$", se tiene más libertad que en los cursos tradicionales. Cuando se ha probado $\underset{x \to 0}{Lim} \dfrac{Sen(x)}{x}$ lo que se ha probado es que entre los tres pares de paréntesis de $\underset{(\ ) \to 0}{Lim} \dfrac{Sen(\ )}{(\ )}$ debe ir la misma expresión simbólica para que el límite de 1. Es este hecho el que justifica los cambios de variable.

Si, bajo esta perspectiva se analiza $\underset{x \to 0}{Lim} \dfrac{Sen(2x)}{x}$ se ve que entre los paréntesis no va lo mismo. La expresión que aseguraría que el límite es 1 es $\underset{(2x\ ) \to 0}{Lim} \dfrac{Sen(2x\ )}{(2x\ )}$. Una estrategia general es ver cómo modificar $\underset{x \to 0}{Lim} \dfrac{Sen(2x)}{x}$, de manera gradual, para poder utilizar el hecho de que $\underset{(2x\ ) \to 0}{Lim} \dfrac{Sen(2x\ )}{(2x\ )} = 1$.

El primer punto es que

$$\underset{x \to 0}{Lim} \frac{Sen(2x)}{x} = \underset{2x \to 0}{Lim} \frac{Sen(2x)}{x}$$

porque decir que $x \to 0$ es totalmente equivalente a decir que $2x \to 0$. (Esto se lo puede hacer ver al alumno gráficamente). Con este primer paso ya se ha aumentado el parecido entre ambos límites.

Para que la coincidencia fuese exacta se necesita que en el denominador aparezca un 2. Pero si se pone el 2, se obtiene una fórmula con valores diferentes a la inicial. La idea es pues reescribir o cambiar la forma de la fórmula sin cambiar el valor, para que el valor del límite de la nueva fórmula sea el mismo. Esto nos lleva a

$$\lim_{2x \to 0} \frac{Sen(2x)}{x} = \lim_{2x \to 0} 2\frac{Sen(2x)}{2x}$$

Por otro lado :

$$\lim_{2x \to 0} 2\frac{Sen(2x)}{2x} = 2\lim_{2x \to 0} \frac{Sen(2x)}{2x}.$$

Como ahora se tiene $2x$ en todas partes se puede decir que :

$$2\lim_{2x \to 0} \frac{Sen(2x)}{2x} = 2.1$$

Considerando las igualdad anteriores se tiene :

$$\lim_{x \to 0} \frac{Sen(2x)}{x} = \lim_{2x \to 0} \frac{Sen(2x)}{x} = \lim_{2x \to 0} 2\frac{Sen(2x)}{2x} = 2\lim_{2x \to 0} \frac{Sen(2x)}{2x} = 2.1 = 2$$

Esta manera de resolver el límite es más larga que la manera habitual del cambio de variable. Sin embargo, para el nivel de formación de nuestros alumnos es más transparente. Y tiende a mecanizarlos menos.

ESCENA 5

<u>Pizarra</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{Sen(3x)}{x} =$$

<u>Libro : 9-69</u>

<u>Actividad (2 minutos, pupitre)</u>

Hacer el ejercicio.

<u>Comentario</u>

Permitir al alumno enfrentar la técnica.

ESCENA 6

<u>Pizarra</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{Sen(2x)}{Sen(3x)} =$$

<u>Libro : 9-69</u>

<u>Actividad (minutos, pupitre)</u>

Hacer el ejercicio.

Comentario

En este ejercicio se ve que el mero cambio de variable no es productivo. Lo que funciona es tratar de hacer entrar en juego el límite notable y esto se logra "jugando con los parecidos". Un primer paso para ello es :

$$\frac{Sen(2x)}{Sen(3x)} = \frac{Sen(2x)}{2x}\frac{2x}{Sen(3x)}.$$

ESCENA 7

Pizarra

CALCULOS CON $\underset{n\to\infty}{Lim}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Hasta ahora la exponencial se ha utilizado, pero no se ha definido. La definición es:

$$e^x = \underset{n\to\infty}{Lim}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Para calcular límites de la forma $\underset{x\to\infty}{Lim}\left(1+f(x)\right)^{g(x)}$, la igualdad que se da a continuación (sin prueba) resulta muy útil:

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\left(1+f(x)\right)^{g(x)} = \underset{x\to\infty}{Lim}\ e^{f(x)\cdot g(x)} = e^{\underset{x\to\infty}{Lim}\ f(x)\cdot g(x)}.$$

Se puede aplicar cuando $\underset{x\to\infty}{Lim}\ f(x)=0$ y $\underset{x\to\infty}{Lim}\ g(x)=\infty$.

Ejemplo,

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)^x = \underset{x\to\infty}{Lim}\ e^{\frac{2x}{x^2+1}\cdot x} = e^{\underset{x\to\infty}{Lim}\frac{2x}{x^2+1}\cdot x} = e^2.$$

Libro : 9-70

Actividad (4 minutos, pizarra)

Explicar esa página.

Comentario

ESCENA 8

Pizarra

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n =$

Libro : 9-70

Actividad (3 minutos, pupitre)

Comentario

Sugerirles que comparen la forma $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ con la forma $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Se les puede preguntar ¿quién juega el papel del x?

ESCENA 9

Pizarra

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ y $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=$

Libro : 9-71

Actividad (3 minutos, pizarra)

Hacer el ejercicio dado por $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=$

Comentario

Nuevamente aquí está el problema de comparación de formas. La forma sin letras, de enunciar el límite notable, es : $\lim\limits_{(\ )\to 0}\frac{e^{(\ )}-1}{(\ )}$. Y ese límite da 1 si en todos los ( ) va el mismo símbolo.

FASE FINAL

ESCENA 10

Pizarra

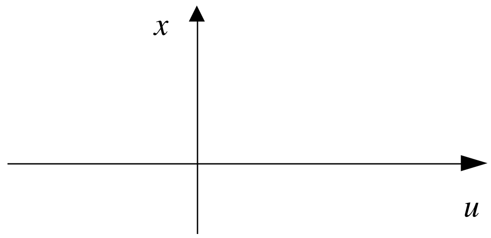
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{Ln(x+1)}{x}=$

Libro : 9-71

Actividad (5 minutos, pupitre)

Comentario

Sugerir el cambio $x=e^u-1$.

Pedirles que grafiquen en  la curva de $e^u - 1$. Para que se convenzan de que cuando $x \to 0$ entonces $u \to 0$. (debe usarse caminos de vuelta, porque la x está en el eje vertical).

Por otro lado, ver que si $u \to 0$, la $x \to 0$, sale por sustitución ingénua.

En esta fase, en la medida de que haya tiempo, se pueden contestar dudas o hacer límites de la sección de repaso.

CLASE 24

VISION GLOBAL

Esta clase tiene por objetivo :

Dar la definición de derivada.
Dar la tabla de derivadas de algunas teclas.
Dar las reglas de derivación.

FASE INICIAL

ESCENA 1

<u>Pizarra</u>

$$\square = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \ \square \ \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = \square$$

$$\square = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x} \ \square \ \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \square$$

$$\square = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x} \ \square \ \lim_{x\to 1} \frac{x}{e^x} = \square$$

$$\square = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} \ \square \ \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = \square$$

$$\square = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \ \square \ \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2} = \square$$

<u>Libro : 9-60</u>

<u>Actividad (3 minutos, pupitre)</u>

Complete poniendo = o ≠ en el cuadro del medio. Y el valor de los límites en los cuadros laterales.

<u>Comentario</u>

El objetivo de este tipo de ejercicio es seguir insistiendo para que los alumnos tomen en cuenta el $x \to a$..

En caso de que sea muy engorroso escribir todo el ejercicio en la pizarra puede escribir solo la primera línea para ubicar al alumno de cu´la ejercicio se trata.

ESCENA 2

<u>Pizarra</u>

Estudiar el $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+4}{f(x)}$,

Primero sustitución ingénua y luego ...

<u>Libro : 9-61 y 9-62</u>

Actividad (3 minutos, pupitre o/y consulta individual)

Estudiar el límite

Comentario

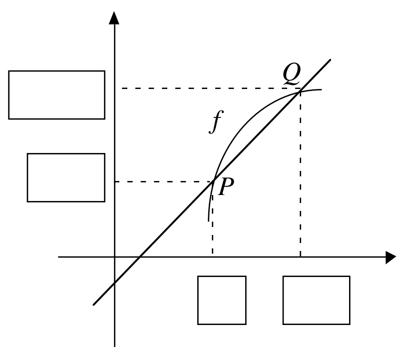
La curva de la tecla $f(\ )$ está dibujada en la 9-61.

Se ha notado que a los alumnos les cuesta mucho proceder cuando al hacer la sustitución ingénua se llega a una indeterminación del tipo Finito/Cero. Este ejercicio es para inducirlos a que en una situación de este tipo siempre hay que estudiar el límite por la derecha y el límite por la izquierda.

FASE MEDIA

ESCENA 3

Pizarra



Libro : 10-1

Actividad (3 minutos, pizarra)

Ayudar a leer y completar la página.

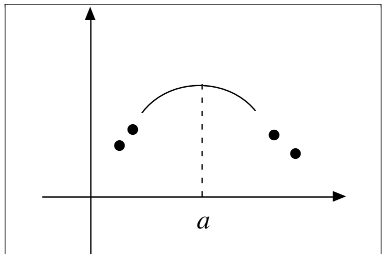
Comentario

Conviene hacer esta actividad al inicio de la fase media porque se está dando una definición fundamental y es provechosa la presencia del mayor número de alumnos.

La actividad de esta página fué parcialmente cubierta en la Página 6-13. Al alumno con lo que ya ha aprendido en el curso se le hace fácil entender la expresión de la pendiente de la recta. Lo que hay que insistir es en el hecho de en lo que ese va convirtiendo la secante PQ a medida que el punto Q "se acerca" al punto P. Y luego hacer notar que la pendiente de la secante se acerca a la pendiente de la tangente y que la simbolización de la idea de la pendiente de la tangente es la del límite de la pendiente de la secante.

ESCENA 4

Pizarra

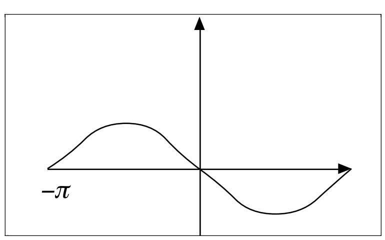


$f'(x) = 0 \quad si \quad x \in \{a\}$
$f'(x) > 0 \quad si \quad x \in (-\infty, a)$
$f'(x) < 0 \quad si \quad x \in (a, \infty)$
$\forall x, \ \exists f'(x)$

Libro : 10-2

Actividad (3 minutos, pupitre)
Explicar la figura. En particular los cuantificadores.
Comentario
Hasta ahora no se han utilizado los cuantificadores en el libro. Sin embargo, es conveniente comenzar a utilizarlos o al menos a presentarlos en ciertas situaciones para preparar los alumnos para el formalismo de la definición de límite.
Por otro lado la actividad tiene por objeto el que las personas evalúen gráficamente (mediante la consideración de la recta tangente apropiada) la derivada en un valor. Debido a que se trabaja en el cuadro gráfico sólo se habla del signo de la derivada y a lo sumo si en un punto la derivada es mayor que en otro.

ESCENA 5
Pizarra



$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x) = 0 \quad si \quad x \in \\ f'(x) > 0 \quad si \quad x \in \\ f'(x) < 0 \quad si \quad x \in \\ ¿Donde\ f'(x)\ no\ \exists? \end{array}}$$

<u>Libro : 10-2</u>

<u>Actividad (3 minutos, pupitre)</u>

Completar el ejercicio.

<u>Comentario</u>

Este ejercicio es para darle al alumno la oportunidad de verificar si ha captado claramente las ideas de las dos escenas anteriores.

ESCENA 6

<u>Pizarra</u>

$$(Cons\,tan\,te)' =$$
$$(ax+b)' =$$
$$(ax)' =$$

<u>Libro : 10-4</u>

<u>Actividad (3 minutos, pizarra)</u>

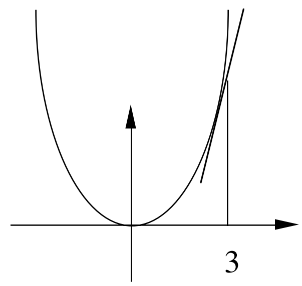
Contestar las preguntas de la pizarra.

<u>Comentario</u>

El cuadro gráfico es particularmente apropiado para responder estas preguntas. Esto se debe al hecho de que las curvas de las fórmulas involucradas en las preguntas son todas ellas rectas y las tangentes a las rectas son ellas mismas.

ESCENA 7

Pizarra



Libro : 10-4

Actividad (3 minutos, pizarra)

Hallar la pendiente de la tangente a la parábola en el punto (3, 9). Y luego utilizar el cálculo hecho para obtener la fórmula de la derivada de $(\quad)^2$.

Comentario

La pregunta planteada no se puede resolver de manera precisa y segura en el cuadro gráfico. Hay que acudir al cuadro simbólico y esto hace ver la importancia de tener una definición simbólica de la derivada. Es la aplicación de esa definición que va a permitir dar la respuesta apropiada a la pregunta.
La explicación dada por el profesor debería hacer ver esto. Primero, recordar la definición dada unas escenas antes. Y luego tratar de aplicarla al caso del ejemplo. Preguntar ¿Quién es x en nuestro caso? ¿Quién es f? etc. Luego se trata de hacer el procedimiento (desarrollo del binomio de Newton,...etc). hasta obtener $2 \cdot 3$.
Conviene hacer el procedimiento (con el 3) de manera clara y dejarlo escrito en su totalidad en la pizarra, para mostrar al final que si uno quiere hallar la fórmula de la derivada basta con poner una letra en vez del número 3. Una posible letra es a y de esta manera se va a obtener lo que está escrito en la mitad de la página 10-4.
Después de hallar la fórmula de la derivada del cuadrado, puede ilustrar su uso (y la potencia de lo obtenido) preguntando por pendientes de tangentes en diversos puntos de la parábola.

ESCENA 8

Pizarra

Tecla	Derivada
C	0
$C\cdot(\quad)$	C
$(\quad)^2$	$2(\quad)$
$(\quad)^n$	$n\cdot(\quad)^{n-1}$
$Sen(\quad)$	$Cos(\quad)$
$Cos(\quad)$	$-Sen(\quad)$
$Ln(\quad)$	$\dfrac{1}{(\quad)}$
$e^{(\quad)}$	$e^{(\quad)}$

Libro : 10-7

Actividad (3 minutos, pizarra)

Comentar la tabla.

Comentario

La notación $f(\ )$ y $f'(\ )$ es fundamental a la hora para evitar errores de los alumnos cuando se va a aprender la regla de la cadena.

Algunas de las fórmulas derivadas ya han sido deducidas durante la clase. Otras no. En las páginas 10-4 y 10-5 aparecen como ejercicio el cálculo de la fórmula derivada del seno y de la exponencial. La finalidad de esta escena es introducir la tabla de derivadas básica. Con el objeto de explotarla en las escenas que siguen. La intención no es probar cada una de las fórmulas derivadas.

Observe que esta tabla juega un papel similar al alfabeto gráfico. Así como cada tecla tiene su curva, cada tecla también tiene su tecla derivada. Y al igual que con las curvas del alfabeto se podía hacer curvas de fórmulas mediante las técnicas del Capítulo 2, aquí se va a poder hacer derivadas de fórmulas a partir de las derivadas de las teclas mediante "las reglas de derivación", que deben ser explicadas en las escenas que siguen.

ESCENA 9

Pizarra

$\left((f+g)(x)\right)' =$

Libro : 10-7

Actividad (3 minutos, pizarra)

Deducir la regla para derivar sumas de fórmulas.

Comentario

Está hecha en el libro pero es conveniente ayudar a los alumnos a entender cada una de las igualdades.

ESCENA 10

Pizarra

$(3x+2)' =$

$\left(x^5 - x^2 + 4x + 1\right)' =$

Libro : 10-7 y 10-8

Actividad (2 minutos, pizarra)

Mostrar la aplicación de la regla de la suma y de que $\left((\ )^n\right)' = n(\ )^{n-1}$ (aparece en la tabla)..

Comentario

ESCENA 11

Pizarra

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Libro : 10-8

Actividad (3 minutos, pizarra)

Aplicar esta fórmula a $(Sen(x)Cos(x))' =$

Y a $(cg(x))' =$

Comentario

No vale la pena demostrar la regla del producto.

Conviene recalcar que la derivada de un producto no es el producto de las derivadas. Cuando se va a aplicar la regla es conveniente preguntar quién juega el papel de la f y quién juega el papel de la g.

ESCENA 12

Pizarra

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Libro : 10-8 y 10-9

Actividad (3 minutos, pizarra)

Aplicar la regla a $(Tang(x))'$ y así deducir la fórmula de la derivada de la tangente.

Comentario

Al igual que con la regla del producto el énfasis no está en deducir la regla sino en enseñar cómo aplicarla.

ESCENA 13

Pizarra

$$\boxed{(Sec(x))' = \left(\frac{1}{Cos(x)}\right)' =}$$

Libro : 10-9

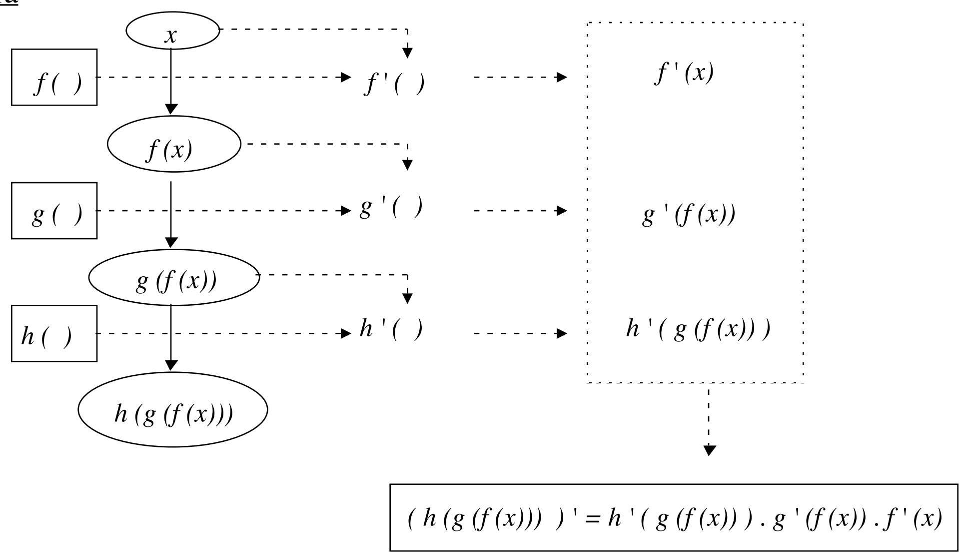
Actividad (5 minutos, pupitre)

Comentario

El objetivo de hacer esta actividad en pupitre es darle al estudiante la oportunidad de aplicar por su cuenta parte de lo dado en esta clase. Como siempre, a los que lo hagan rápido, se les puede sugerir que avancen haciendo otros ejercicios de la Pågina 10-10.

ESCENA 14

Pizarra



Libro : 10-12

Actividad (3 minutos, pizarra)

Ayudar a leer la presentación de la regla de la cadena de la página 10-12.

Comentario

Insistir en que la regla de la cadena es la que sirve para la composición de fórmulas. (Porque es la que se aplica a aquellas fórmulas cuyo diagrama es no ramificado).

En la regla de la cadena es que se constata, para nuestros alumnos, las ventajas de la notación $f(\ )$. El $(\ )$ da la posibilidad de poner adentro fórmulas y no sólo la variable x. En la regla de la cadena dada con el diagrama se especifica qué es lo que va en $(\ )$ en cada caso.

Hay un punto delicado : cuando la tecla es $a(\ )$ la derivada es a y por no aparecer el $(\ )$ no se debe poner nada al lado del a.

La intención de presentar la regla de la cadena no es la de sustituir los procedimientos habituales de aplicación de dicha regla. Lo que se está haciendo es dando una presentación que, en las fases iniciales del aprendizaje de la regla, es fácilmente captada por el grueso de nuestros estudiantes. Esto en gran parte se debe a que se están utilizando recursos semióticos (el diagrama y la notación con $(\ )$) que los alumnos dominan por el trabajo que se ha hecho en los capítulos anteriores (en el Cap 3 en particular). Utilizando la vía del diagrama para presentar la regla de la cadena, se ha notado una mejoría drástica comparado a otras maneras de proceder.

En la clase siguiente se inicia el trabajo con la regla de la cadena para llegar a los procedimientos habituales (sin diagrama).

ESCENA 15

Pizarra

$\left(\sqrt{Ln(x-3)}\right)' =$

Libro : 10-12

Actividad (3 minutos, pizarra)

Hacer esta derivada utilizando el diagrama. De hecho se trata de ayudar al estudiante a leer la segunda parte de la página 10-12.

Comentario

La actividad es un ejemplo de aplicación de la regla de la cadena.

FASE FINAL

ESCENA 16

Pizarra

$\left(Sen(Cos(Tang(x)))\right)' =$

Libro : 10-13

Actividad (3 minutos, pupitre)

Hacer el ejercicio.

Comentario

Permitir al alumno fijar ideas sobre la regla de la cadena.

CLASE 25

VISION GLOBAL

La clase consta de dos partes.

La primera consiste en terminar de dar los elementos para el cálculo de derivadas de fórmulas. En particular se trata de mostrar cómo se calculan derivadas de inversas. Cómo se calculan derivadas de fórmulas elevadas a fórmulas. Y cómo se calculan derivadas de fórmulas con diagramas complicados.

La segunda parte consta de aplicaciones elementales del concepto de derivada. Algunas de ellas serán retomadas en el curso del próximo semestre.
En particular se puede mostrar cómo utilizar la derivada para calcular la posición exacta de máximos o mínimos de una fórmula. El cálculo de una recta tangente a un punto de una curva. La noción de n-ésima derivada. Y finalmente aplicaciones a la física, donde se destacan la noción de cálculos aproximados, la interpretación de algunos conceptos físicos en términos de derivada y la noción intuitiva de diferencial.

FASE INICIAL

ESCENA 1

Pizarra

$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$

Libro : 10-16 y 10-17

Actividad (4 minutos, pizarra)

Explicar cómo se puede expresar la derivada de la inversa de f^{-1}en función de la derivada de f. Esto sale derivando a ambos lados la igualdad que está en la pizarra. En el lado izquierdo hay que aplicar la regla de la cadena.
Hacer la aplicación al $Arcsen(\ )$

Comentario

En la aplicación de la identidad trigonométrica hay que ser muy cuidadoso. Hay que hacer entender que el “ α“ en ese caso es todo $Arcsen(x)$.
Después de deducirlo conviene decir a los alumnos que lo que ellos van a utilizar no es la deducción sino el resultado de la deducción.

ESCENA 2

Pizarra

$$\left(f^g\right)' = \left(\left(e^{Ln(f)}\right)^g\right)' = \left(e^{Ln(f)\cdot g}\right)' = e^{Ln(f)\cdot g}\left(\frac{f'}{f}\cdot g + Ln(f)\cdot g'\right)$$

Como $e^{Ln(f)\cdot g} = f^g$, se obtiene substituyendo:

$$\left(f^g\right)' = f^g\cdot\left(\frac{f'}{f}\cdot g + Ln(f)\cdot g'\right)$$

Libro : 10-21

Actividad (5 minutos, pizarra y pupitre)

Explicar la deducción de la fórmula de la derivada de una función elevada a otra función.
Depués de hacer la deducción de la fórmula conviene mandar a hacer en el pupitre la deducción de la derivada de e^x .

Comentario

Este ejercicio es interesante porque la mayoría de los alumnos confunden la función constante e con la función exponencial $e^{(\ )}$.

FASE MEDIA

ESCENA 3

Pizarra

$$\left(ArcSen(Ln(x)) - \frac{\sqrt{e^x - Tang(x)}}{Cos(x) + x^2 - 1} \right)' =$$

Libro : 10-19

Actividad (5 minutos, pizarra)

Mostrar cómo se hace esta derivada.

Comentario

Conviene hacer esta actividad al comienzo de la Fase Media, porque las indicaciones que se van a dar son esenciales para el tema.

Hay que insistir en dos cosas : siempre en cada paso aplicar una sola regla. Y la regla que se aplica es siempre la última tecla del diagrama.

Se les puede preguntar ¿Cuál es el primer paso que se va a dar? Y se puede hacer el diagrama para que identifiquen en él la última tecla.

La fórmula a poner en la pizarra ha sido escogida para impresionar al estudiante y para desorientarlo en cómo comenzar el cálculo de la derivada.

ESCENA 4

Pizarra

$$Ln(x^2 + 1) - \sqrt{x}$$

Libro : 10-20

Actividad (2 minutos, pizarra)

Ayudar al alumno a leer las indicaciones, referentes a este ejercicio, que están en MG. Mostrando que la idea de aplicar la regla de la última tecla sigue funcionando.

Comentario

ESCENA 5

Pizarra

$Ln(x^2+1-\sqrt{x})$

Libro : 10-21

Actividad (3 minutos, pupitre)

Hacer el ejercicio

Comentario

Es conveniente darle la oportunidad al alumno de aplicar por él mismo lo que se le acaba de explicar. Este ejercicio se parece mucho al anterior pero las teclas han sido aplicadas en otro orden y eso va a hacer que la última tecla no sea la misma y por ello la primera regla a aplicar sea que la de la escena anterior.

ESCENA 6

Pizarra

Graficar xe^x.

Libro : 10-25

Actividad (5 minutos, pizarra)

Explicar la página 10-25.

Comentario

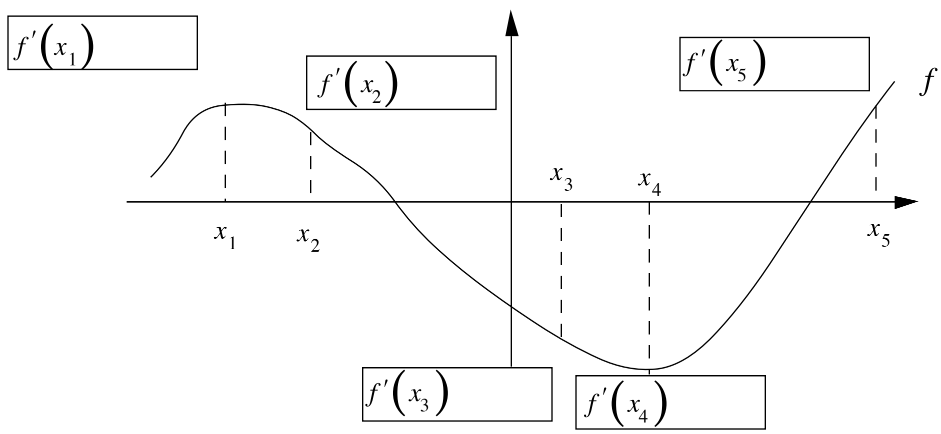
En el libro se trata de mostrar cómo el conocimiento de la derivada puede ser útil para perfeccionar el esbozo de gráfico que se suele hacer con los recursos disponibles hasta este momento. En efecto al graficar xe^x se puede proceder con la técnica de los capítulos 2 y 4 : hacer la gráfica de cada tecla y hacer el producto gráfico de ambas. Esto ya da una idea del gráfico pero hay que utilizar el Capítulo 9 para tener idea de cómo va a ser la curva en el extremo izquierdo del eje x.

Pero ¿cuál es la información que permite ser respondida con la derivada de manera precisa y que no puede ser respondida con los conceptos anteriores a ella? : la posición de los puntos extremos (máximos o mínimos) donde la fórmula es derivable.

La mayoría de los alumnos no tiene problema en aceptar que en un mínimo, donde existe derivada, la pendiente de la tangente es cero. Otra cosa es conectar este hecho con su simbolización. La mayoría de los estudiantes no lo entiende. Nuevamente, se trata de la algebraización de una situación gráfica. Simbolizar tiene sus ventajas, pero tiene una complejidad conceptual que los alumnos deben comenzar a enfrentar. A menudo, a lo que finalmente llegan en este curso es a plantear la ecuación $f'(x)=0$ y resolverla.

Una posible vía para enfrentar este problema de simbolización es la de pedir al estudiante construir varias desigualdades o igualdades del tipo $f'(x_i)=0$, $f'(x_i)>0$ o $f'(x_i)<0$ viendo la curva.

Ejemplo : completar con =0, < 0 o > 0 los recuadros de la figura.

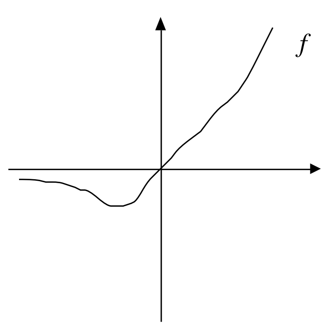


Luego se puede preguntar cuales son las soluciones de $f'(x)=0$. Que equivale a preguntar cuales son los x_i que corresponden a aquellas expresiones (de las cinco) que tienen el signo igual.

Finalmente se puede preguntar cual es el x tal que $f'(x)=0$ y $f(x)>0$

Estas preguntas solo se pueden responder viendo e interpretando adecuadamente el gráfico. Pero cumplen con la función de utilizar expresiones algebraicas para identificar los puntos específicos del plano.

En el caso de la figura



¿Cuántos x van a cumplir con $f'(x)=0$?
Después de este preambulo se puede calcular $f'(x)$ para el ejemplo : xe^x. Y finalmente llegar a la expresión : $e^x(1+x)=0$. La resolución algebraica de esta ecuación no es inmediata para los alumnos, hay que explicarla.

ESCENA 7

Pizarra

Hallar el mínimo de $3x^2+2x-1$. Hallar el punto de la curva de $3x^2+2x-1$ donde su tangente tiene pendiente 1.

Libro : 10-27

Actividad (3 minutos, pupitre)

Comentario

Esta actividad amplía el espectro de la simbolización. Se espera que tienda a reforzar la comprensión de la ecuación $f'(x)=0$.

ESCENA 8

Pizarra

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(n)}(x), n>4$
$Sen(x)$					

x^4					

Libro : 10-28

Actividad (4 minutos, pizarra y pupitre)

Mostrar la noción de n-ésima derivada con el ejemplo de $Sen(\ )$ (en 10-29). Pedir hacer el de x^4 (en 10-28).

Comentario

Esta noción es muy fácil para los alumnos.

Se puede preguntar cuál va a ser la derivada 2001 del seno.

ESCENA 9

Pizarra

Fórmula	Punto de tangencia	Fórmula de la recta a la curva en el punto de tangencia especificado.
$f(x)$	$(a, f(a))$	$f'(a)(x-a)+f(a)$ (Ver 6-12)
$Sen(x)$	$(0, \quad)$	

Libro : 10-29

Actividad (3 minutos, pizarra)

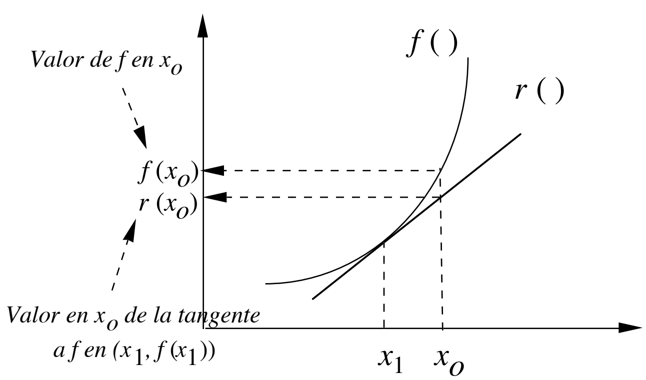
Hacer el primer ejercicio de la serie

Comentario

Esto es una actividad donde la mayor dificultad es reconocer los elementos en el caso particular.

ESCENA 10

Pizarra



Libro : 10-30

Actividad (3 minutos, pizarra)

Explicar el dibujo de la página.

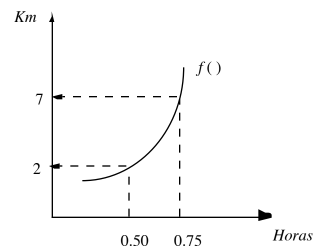
Comentario

La idea de utilizar rectas tangentes para aproximar localmente funciones es fundamental. El cuadro gráfico y el entrenamiento que los estudiantes han recibido, se prestan a explicar esa idea de aproximación gráficamente.

El paso a la simbolización es sencillo : es esencialmente un proceso de “transcripción” en el cual los alumnos ya son duchos.

ESCENA 11

Pizarra



Libro : 10-32

Actividad (5 minutos, pizarra)

Contestar las preguntas de la página.

Comentario

Esta parte no es muy difícil. Es particularmente útil para las personas que han visto Física 1 o que han estudiado bien la física en Bachillerato.

Se trata de hacer ver con claridad cómo algunos aspectos del movimiento de un cuerpo pueden ser representados con el uso de las curvas.

Para ello hay que proceder primeramente a comprender que :

Los ejes del plano cartesiano van a representar cantidades (variables)físicas (tiempo, posición, velocidad, etc...).

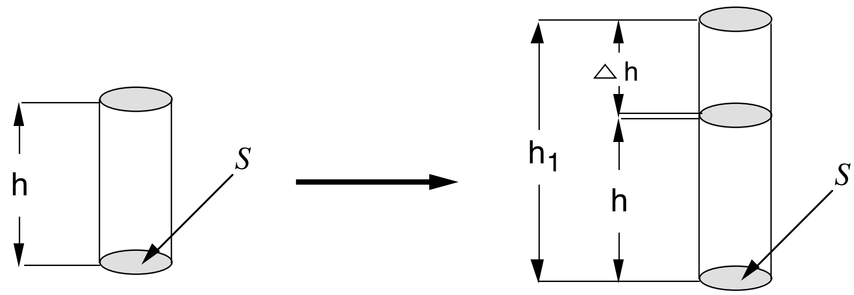
La pendiente de una recta va a interpretarse en el mundo físico : en el caso de las secantes a las curvas suelen ser magnitudes (velocidades o aceleraciones) promedio. (Trabajar sólo el ejemplo de la velocidad y haciendo referencia a la experiencia que casi todos los alumnos tienen con los carros y con la idea intuitiva que ellos tienen de velocidad). En el caso de tangentes suelen ser magnitudes “instantáneas”.

La intención de esta rápida explicación de pizarra no es la de cubrir todo lo contenido en MG (porque no hay tiempo), sino la de facilitar la posterior lectura del tema por el alumno.

Se puede señalar que lo que los físicos llaman variable independiente es para los matemáticos la variable. Y lo que ellos llaman variable dependiente, los matemáticos lo llaman función.

ESCENA 12

Pizarra



Libro : 10-40 y 10-41

Actividad (5 minutos, pizarra)

Explicar la página.

Comentario

Este tema trata intuitivamente la noción de diferencial.

El primer paso consiste en entender el paso de “fórmula de volúmen de un cilindro” a la visión funcional de ella. Cómo expresar (de manera funcional y con curvas) las variaciones de una magnitud dependiente (como el volumen) en función de algunas de las magnitudes independientes (como el area de la base o la altura).

El segundo paso es el paso a la simbolización : cómo se denotan los incrementos y cómo se expresan los incrementos de las magnitudes dependientes en función de las magnitudes independientes y sus incrementos.

El tercer paso, que es donde aparece el diferencial, es una noción que tiene que ver con límite. Dada la escasez de tiempo es difícil insistir en este paso.

FASE FINAL

ESCENA 13

Pizarra

Libro : 10-41 y 10-42

Actividad (5 minutos, pupitre)

En caso de que tenga tiempo puede extenderse un poco sobre la parte de diferenciales. Y hacer las diferentes variantes del volumen.

Comentario