<u>Capítulo 5 de la Tesis de Doctorado</u>

" Elements pour une théorie de la signification en didactique des mathématiques"
Université Bordeaux-1, Francia

El contenido de este capítulo es útil para comprender algunas de las modificaciones, a nivel de los contenidos enseñados, que se hacen en Métodos de Graficación. Es un documento de orden teórico, pero no exige para su lectura una gran formación en didáctica de la matemática.

PARTE 2

Las ideas, conceptos y resultados de los capítulos anteriores surgen en un contexto están que involucra un "proceso de mejora de enseñanza" realizado en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. Este proceso se inicia en 1982 y no ha terminado. Algunas de las ideas, de los capítulos anteriores, surgen como una reflexión y profundización del trabajo hecho a nivel de la enseñanza en dicho proceso. Por otro lado el proceso de mejora de la enseñanza a su vez ha sido influido por algunas de esas ideas y hasta podría verse, a posteriori, como una posible implementación, en el aula, de esas ideas. La amplitud del proceso permite y hasta cierto punto, obliga, a tomar en cuenta diferentes aspectos didácticos.

Vamos primeramente a exponer, en el capítulo 5, un conjunto de consideraciones que sirvieron para iniciar el proceso. Y el tipo de objetos, inovaciones, con los cuales los estudiantes van a realizar actividades de aprendizaje.

En el Capítulo 6, mostramos un estudio matemático, de los objetos teóricos que los estudiantes manejarán a través de dispositivos. El conjunto constituye una mini teoría. Su relación con la teoría de descriptores, presentada en el Capítulo 2, permite plantear y formular teóricamente ciertas propiedades ergonómicas de los objetos estudiados.

En el Capítulo 7, vamos a mostrar algunos de los principales dispositivos utilizados y el funcionamiento que hemos observado tanto en el aprendizaje como en la enseñanza.

Finalemente en el Capítulo 8, se utiliza la experiencia acumulada para reflexiones de tipo "phénoméno-technico". Se pretende con ello y a pesar de que el proceso no fué concebido como una realización didáctica, utilizar la experiencia y observaciones hechas, para profundizar en algunas nociones didácticas y modos de funcionamiento de la transmisión de saberes.

CAPITULO 5

El objetivo de este capítulo es en primer lugar (sección 5.2) hacer un análisis de la enseñanza que se quería modificar y presentar la dirección hacia la cuál se quería modificar. En la sección 5.3 se exponen algunos de los objetos en juego y los conceptos subyacentes que constituyen parte del ambiente o "mileu" sobre el cuál descansa la modificación. Para mayor claridad, aunque en sus inicios la perspectiva no estaba en la didáctica francesa, en la medida en que sirve para aclarar la exposición se utilizarán algunos de esos conceptos. Esto será particularmente cierto para la sección 5.4, que trata de dar una visión, en términos de la variación de ciertos parámetros, de cuál fué el movimiento realizado.

5.1- El inicio.

Existen numerosos trabajos que giran alrededor de la noción de representación gráfica de una función real a variable real y su enseñanza. Baste para ello ver Baillé y Maury (1993), Janvier (1978, 1993), Artigue y Szwed (1984), Gasquet y Chuzeville (1994), Konvisser (1989), Lowenthal y Vandeputte (1989), Alson (1987, 1992, 1994), Una buena parte de esos estudios están orientados hacia la interpretación de los gráficos en situaciones reales o de la vida cotidiana. Otras hacia las habilidades que deberían tener los estudiantes para realizar los gráficos.

Lacasta (1995), Chauvat (1997)), I. Bloch (2000) entre otros inician un trabajo sobre la representación gráfica de funciones reales en el marco de la didáctica. D. Tall (1994) y otros estudian la realización de gráficas desde una perspectiva principalmente cognitiva: determinando y haciendo conjeturas sobre diferentes aproximaciones cognitivas presentes entre los estudiantes. Duval [xx] señala además aspectos relacionados con la semiótica.

En el momento en que se inicia el proceso (1982) buena parte de estos trabajos no existían. La mayoría de los resultados de la Escuela de Didáctica Francesa no existían o no eran fácilmente accesibles.

El detonante, para el inicio del proceso fue la presencia de estudiantes casi incapacitados para estudiar el cálculo. Además de un diagnóstico, basado en buena parte en la observación y clasificación de errores cometidos por los estudiantes, se hizo también que podría asimilarse en la forma a lo que en nuestros días se llama un "análisis apriori", ver Artigue (1989). Pero que dista mucho de la función que le asigna la didáctica al análisis a priori. Existía también una intencion que iba más allá de la pura intervención (acción) en el medio escolar. Se esperaba, aunque no se tuviese conciencia de la carencia de un aparataje teórico para ello, adquirir conocimiento sobre esa realidad.

El análisis, por demás somero, reflejaba en buena parte ciertas preconcepciones, todavía hoy en voga sobre el aprendizaje y la enseñanza del tópico. Se planteaba el problema en términos de la capacidad de pasar lenguaje algebraico a gráfico y recíprocamente, lenguaje gráfico a algebraico. Pero el análisis incluyó también la pregunta de cuáles eran las oportunidades que tenían los estudiantes para hacer actividades que tuviesen que ver, casi únicamente, con el plano cartesiano. La respuesta a esta pregunta fue: casi ni una oportunidad. (Todo estaba orientado a actividades algorítmicas algebraicas). Por ello se pensó en enriquecer las actividades en el propio plano cartesiano. Esto no era inmediato si se piensa en que dichas actividades deberían a la larga poder ser integradas para la consecución de los objetivos declarados de un programa de la asignatura. Además, el hacer esas actividades podía desviar tiempo precioso de las actividades directamente ligadas al programa de la asignatura.

Se ve, a pesar de lo escueto, cómo ese análisis pone implícitamente en juego las principales direcciones que Artigue plantea para ubicar el punto de equilibrio del sistema. Están presentes la dimensión cognitiva de los alumnos, la epistemológica y finalmente la didáctica. Analizamos más en detalle este aspecto al final del capítulo.

En la siguiente sección se explica tanto la enseñanza del tema en aquella época, como el tipo de análisis a priori subyacente a nuestros primeros pasos. El lenguaje utilizado contrasta con lo desarrollado en el resto de la tesis, pero refleja con bastante fidelidad el nivel de análisis y los instrumentos utilizados. Buena parte de este análisis está reportado en Alson (1995).

5.2- Analisis de la enseñanza del topico.

El análisis que sigue tiene por objetivo proveer de una visión de la enseñanza del tópico, suficientemente elevada y global, como para poder plantear directrices para su modificación. La primera parte expone lo enseñado y las exigencias que suele hacerse a los estudiantes. En la segunda se plantea una posible dirección para mejorar de la enseñanza del tópico. En la tercera parte del análisis se enuncian algunas hipótesis para explicar el funcionamiento en 1982, de la enseñanza.

5.2.1- Las exigencias a los estudiantes

Existe una doble visión de "lo enseñado". Está, por una parte, lo que el profesor cree haber enseñado. Está, por otra parte, lo que al alumno le han enseñado realmente. Este hecho es implícitamente reconocido en los libros. Lo enseñado es tanto las explicaciones que aparecen en los libros, como lo que se les exige a los estudiantes sobre lo explicado, es decir los ejercicios y problemas. En cierto sentido dice más sobre lo enseñado, lo que se les exige que lo que formalmente aparece como enseñado en los libros, ya que en lo que se exige está el reconocimiento, por parte del profesor y a través de su experiencia, de cuanto de verdad ha podido ser percibido por el estudiante y por lo tanto enseñado (en el sentido "mostrado" por el profesor y "visto" por el estudiante). Utilizaremos en la primera parte del análisis, este punto de vista doble sobre lo enseñado.

En el Apéndice 1 se da una lista de fórmulas, provenientes de diferentes libros de cálculo, utilizadas para ejercitar a los alumnos en la construcción de representaciones gráficas de funciones. Por razones de comodidad en la exposición, llamaremos a la acción de construir la representación gráfica, dibujar y al producto de ese proceso, dibujo. La lista de fórmulas del Apéndice 1, se puede obtener a partir de ciertas funciones básicas haciendo unas pocas operaciones: suma, producto, inversa numérica y/o composición. Entre las funciones básicas están las lineales, las trigonométricas, la exponencial, el logaritmo, el valor absoluto, etc. Esto podría tomarse como la caracterización del conjunto de funciones que se exige al alumno dibujar. En general, en los libros más utilizados, los ejercicios y ejemplos incluidos, "tienden a cubrir" ese conjunto.

Existe tambien un consenso de las exigencias a hacerle al estudiante en cuanto a la calidad de su representación gráfica: en general se exige que el dominio quede determinado. Cálculo de los máximos, mínimos y puntos de inflexión. Zonas de concavidad de la curva. Rara vez los puntos de corte. Asíntotas oblícuas en caso de que existan. Todo ello se traduce en una especie de algoritmo o "método" de construcción de gráficos. El método constituye parte de lo enseñado. Salvo pequeñas variantes, consiste en:

1- Hallar el dominio

2- Calcular límites en los bordes del dominio.

3- Hallar los valores que anulan la primera derivada (puntos críticos). Hallar los intervalos de crecimiento.

4- Calcular la segunda derivada para determinar los intervalos de concavidad y convexidad. Y para clasificar los puntos críticos.

En general los resultados de las actividades 3 y 4 son resumidos en una tabla: "la tabla de variación de la función". En algunos libros prefieren construir dos tablas. La Figura 1 muestra un ejemplo de tabla para la fórmula $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

x		-1		0		1	
x^2-1	$+$	0		$-$		0	$+$
$f'(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	$+$ $\nearrow$	$\Vert$	$-$ $\nearrow$	-1	$-$ $\searrow$	$\Vert$	$+$ $\searrow$
$f''(x)$	$+$	$\Vert$	$-$		$-$	$\Vert$	$+$

Figura 1

5- En caso de que el límite de la función cuando x tiende a infinito sea infinito, estudiar si hay alguna asíntota oblícua.

6- Paso de la información de los puntos 1, 2, 3, 4 y 5 al gráfico.

Nos referiremos a estos pasos como el método. Y a la tabla de variación como la tabla.

5.2.2- Una relación entre cuadros como marco conceptual.

Creemos que es conveniente dar un marco conceptual para definir las modificaciones a hacer a lo enseñado. La función de dicho marco es facilitar la formulación de las modificaciones. Se pueden definir varios marcos conceptuales para el mismo tópico de enseñanza. Algunos son más pertinentes que otros. Algunás de las características que hacen la utilidad de un marco conceptual, son:

Para que el marco sea útil, lo enseñado debe aparecer en dicho marco como una subactividad. En segundo lugar, la modificación que señala el marco debe facilitar el aprendizaje. Así, supóngase que alguien se plantee como marco conceptual el que sugiere ampliar el conjunto de fórmulas que se enseñan a dibujar actualmente , por el conjunto de todas las funciones definibles por fórmulas. Bajo ese ángulo la enseñanza actual, aparece como una subactividad y sería deficiente, ya que el conjunto de funciones que se enseña es menor al planteado por la modificación sugerida. Sin embargo, exigir al estudiante la graficación de una variedad más grande de fórmulas no va a modificar el aprendizaje de las que debe graficar actualmente. Exigirle al estudiante que grafique $x^{Sen(x)}$, no pareciera que va a modificar su aprendizaje de la graficación de $Cos(3x+2)$. Por ello una visión como la que se ha puesto de ejemplo carece de interés. Un tercer aspecto, de un marco útil, es la claridad con que permite hacer aparecer la dirección de modificación.

Para imaginarse un marco útil hay que darse una idea de lo que es comprender lo enseñado; es decir, hay que pensar en los conocimientos relacionados con lo enseñado. Pensar lo enseñado y tomarlo como tema de investigación para aprender lo más posible sobre él. A continuación se exponen las reflexiones que condujeron a la definición del marco conceptual que se utilizará para la modificación.

¿ Cuales son los rasgos visuales de la curva que determinan que el dibujo sea reconocido como un dibujo del gráfico de f ? Algunos de ellos son los máximos o mínimos, sus valores y dónde son alcanzados, intervalos de comportamiento monótono, donde crece o decrece, rupturas y número de componentes conexas, zonas no acotadas, puntos de cortes con los ejes, etc. ¿Porqué esos rasgos son determinantes visualmente? No lo sabemos. Probablemente la psicología o la semiótica sean de utilidad para responder esta pregunta. Esos hechos son reconocibles visualmente y pueden ser estudiados sobre diferentes curvas sin necesidad de mucha formalización algebraica y con la ayuda, más bien, de especificaciones de tipo pictórico. El alumno aprende rápidamente a reconocerlos visualmente. Podrían ser pensados como los elementos de un léxico gráfico que permiten una descripción de las curvas y sobre todo la discriminación entre diferentes curvas a un nivel de precisión suficiente como para diferenciar entre dibujos correctos o incorrectos. Es decir, existen "rasgos visuales" de las curvas que "caracterizan" su representación. Creemos que esos rasgos son en gran parte los que Janvier (1978) llama "rasgos gráficos globales". Citando a Artigue y Szwed (1984, pág. 6), son "rasgos que corresponden a una particularidad de un gráfico relacionada con un intervalo o que necesita para ser aprehendida un procedimiento que no sea puntual". La búsqueda de información algebraica hecha en los pasos 1 al 5, corresponde a la definición, en un contexto algebraico, del léxico gráfico o los rasgos gráficos globales que definirán la curva que corresponde a la fórmula.

La noción de cuadro es una noción que ha sido utilizada en la literatura en varias oportunidades, ver Douady (1984). Esa noción es suficientemente clara para servir como instrumento para estructurar la discusión y ayudar a definir el marco. Para ello conviene pensar las curvas y el léxico gráfico como elementos de un cuadro gráfico inicial. En analogía al cuadro gráfico, se puede pensar en un cuadro algebraico conformado por las fórmulas y por objetos que permiten la "traducción" al álgebra de los rasgos gráficos globales pertinentes. Entre esos objetos están las ecuaciones, inecuaciones, límites y derivadas. La Figura 2 [xx] esquematiza ambos cuadros y las relaciones de transferencia de un cuadro a otro en la enseñanza actual.

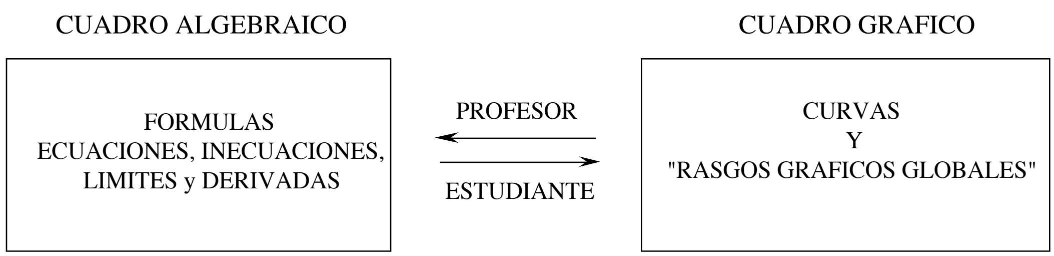


Figura 2.

Se observa que el pasaje del cuadro gráfico al algebraico es un papel jugado por el profesor. Saber definir los rasgos gráficos globales en el cuadro algebraico (actividad de paso o de conversión (Duval [xx])) no es fácil. La derivada y los límites son los principales instrumentos para ello. Teoremas del tipo "si $f'(x)$ es positiva en un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo" son la traducción útil al cuadro algebraico de los rasgos gráficos globales. Suelen ser parte de la "teoría" y es el profesor el que habla de ella para establecer los elementos del cuadro algebraico y el método descrito en la sección anterior.

El esquema muestra también que el paso de lo algebraico a lo gráfico es esencialmente una tarea del estudiante. Es un trabajo de naturaleza conceptual mucho menor que la teoría. Dada una fórmula, el alumno debe hacer los pasos 1 al 5 y en particular la tabla. La mayoría de nuestros alumnos no comprende claramente porqué se buscan esos elementos en el cuadro algebraico y el sistema escolar sólo le exige que sepa hacer los pasos. Nuestra experiencia es que el alumno aprende mecánicamente a hacer los cálculos algebraicos indicados por el profesor. A menudo tiene inclusive dificultades serias en traducir los resultados algebraicos, que obtiene en los pasos 1 a 5, al cuadro gráfico. Otro aspecto que nuestra enseñanza deja de lado es la capacidad de reconocer el nombre o fórmula de una curva (salvo los casos más elementales).

Pensábamos que si alguien quiere entender porqué está buscando cierta información algebraica debe comprender que esa información algebraica es la traducción al cuadro algebraico de cierta información visual. Comprender porqué se busca la información algebraica implica pues una capacidad de paso de ciertos rasgos visuales de la curva al cuadro algebraico. Nuestros alumnos no son capaces de traducir a condiciones y conceptos algebraicos los "rasgos gráficos globales".

De acuerdo a las reflexiones hechas, el marco conceptual que utilizaremos, para definir la modificación de la enseñanza del tópico de construcción de gráficas de funciones, consistirá en ver lo enseñado como parte de una actividad de relación o transferencia de información entre dos cuadros: el algebraico y el gráfico. Con ese marco en mente, parece evidente que facilitar el manejo por parte del alumno de transferencias de información en ambos sentidos debe ser la dirección apropiada de las modificaciones a la enseñanza actual del tópico de graficación de funciones.

5.2.3- Hipótesis para explicar el funcionamiento actual de la enseñanza.

La existencia de cierta manera de enseñar obedece a multitud de factores. No es el objetivo de este trabajo hacer un análisis exhaustivo de los factores que han llevado la enseñanza de la representación gráfica de funciones a su forma actual. Sin embargo, unas hipótesis mínimas sobre esos factores y su funcionamiento, son necesarias para plantear una alternativa viable.

Creemos que el funcionamiento asimétrico, en la enseñanza, de la transferencia entre los cuadros, se debe a que sus contenidos son muy dispares. Esta disparidad dificulta u obstaculiza la transferencia o traducción de uno a otro. La disparidad se manifiesta por lo menos en dos aspectos: uno,la naturaleza de la información manejada en cada cuadro y dos, los mecanismos para manejar los objetos en cada cuadro.

Si se piensa que el contenido básico del cuadro algebraico es la fórmula, se observa que ella contiene una información que es esencialmente la historia de su propia creación. $Sen(x+2)$ es, en primera instancia, el símbolo que representa a la función seno evaluada en $x+2$, en ese sentido representa o designa una historia. La información del cuadro algebraico tiene una estructura que permite significar o designar una función. En cambio en el cuadro gráfico lo que se tiene es la acumulación de información, pero es información anónima, la lectura directa no suele significar una función sino propiedades de una función, es decir al mirar la curva se puede reconocer donde crece, si tiene máximo, etc, pero rara vez se reconoce la función, de la cuál ella es gráfico.

La transferencia del cuadro algebraico al cuadro gráfico está condicionada por el hecho de que el gráfico refleja propiedades de la función y no la función misma. Ya que la única posibilidad que ofrece el cuadro gráfico, tal como existe actualmente, es la de acumular información, se trabaja en el cuadro algebraico para obtener información acumulable en el cuadro gráfico. Para ello, a diferencia del cuadro gráfico, el cuadro algebraico está dotado de la capacidad de operar sobre sus objetos básicos. En cuanto a mecanismos de manipulación de sus objetos, el cuadro algebraico es mucho más rico que el cuadro gráfico.

Las hipótesis que se acaban de hacer sugieren que para lograr la modificación de la enseñanza que facilite el aprendizaje, propuesta en la sección anterior, **se deben enseñar cuadros algebraicos y gráficos que sean más equilibrados en sus contenidos.** Esta fue nuestra hipótesis de trabajo e implicaba, como se ve más adelante, poner en juego otros saberes diferentes a los usuales.

5.3- Saberes para reequilibrar el funcionamiento de los cuadros.

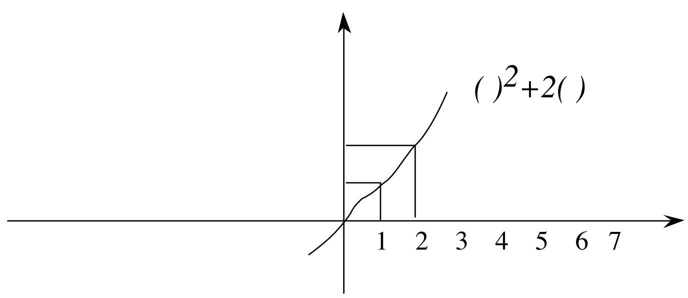
Para reequilibrar el funcionamiento de los cuadros no basta con poner contenidos "equivalentes" en ambos cuadros. Ello corresponde a una visión estática del problema. Se trata de incorporar saberes y combinarlos de tal forma que el alumno deba, para aprender el tópico, adquirir los saberes de ambos cuadros y lograr manejarlos de manera fluida. La selección de los saberes necesarios para reequilibrar el funcionamiento de los cuadros no es trivial. Los saberes que se presentan a continuación son el fruto de años de trabajo. Parte del trabajo es haber constatado, con alumnos, su utilidad para reequilibrar el funcionamiento de los cuadros (esta actividad de constatación puede verse, como una ingeniería didáctica embrionaria, necesaria para la investigación de ciertos funcionamientos didácticos). En la sección 5.3.1 se dan los elementos básicos para poder hacer una transferencia de información del cuadro visual al algebraico, se trata esencialmente de codificación de puntos. En la sección 5.3.2 se dan mecanismos que permiten operar con los objetos del cuadro visual que nos interesan: las curvas. Las secciones 5.3.3 y 5.3.4 siguen presentando mecanismos para operar con curvas del plano. Sin embargo, su papel en la enseñanza es diferente a los saberes de la sección 5.3.2. Se trata de saberes para que las operaciones en el cuadro visual sean suficientemente rápidas para competir con las que se realizan en el cuadro algebraico. Esto es para asegurar el **reequilibrio del funcionamiento** de los cuadros para los alumnos y en la clase.

5.3.1- Codificación de puntos del plano.

Los puntos del plano cartesiano "representan" pares ordenados. Para ello el plano cuenta con un par de ejes y cada uno de ellos con una escala que permite descubrir qué par ordenado representa un punto dado, o bien cual es el punto que representa a un par ordenado dado.

Podría pensarse la actividad de asignarle un par ordenado a un punto del plano cartesiano como una actividad de codificación del punto. En el sistema de enseñanza actual las actividades de codificación de puntos rara vez pasan de este caso particular. De hecho, son casi inexistentes. Cuando se deben hacer, por ejemplo en las demostraciones, suelen ser hechas por los profesores y muchas veces la no comprensión de su funcionamiento es un obstáculo para los alumnos. Por ejemplo cuando se quiere hacer la interpretación gráfica de la derivada, se escoge un punto del eje x y se lo denota con x, luego se toma un punto cercano, usualmente a la derecha, y se lo denota con $x+h$. Quien hace esta codificación es el profesor. A él le conviene para la explicación que comienza. A menudo el alumno, que no está acostumbrado a codificar, no comprende el porqué de esa codificación.

La posibilidad de expresar hechos visuales en términos algebraicos pasa por una codificación adecuada de los puntos del plano. La codificación de los puntos del plano no es libre. Suele ser el resultado de relaciones entre posición y código de otros puntos previamente codificados. Tiene consecuencias importantes en la forma de los gráficos, como lo señala Nadot (1993). Un ejercicio que no es frecuente y que deja ver las restricciones implícitas en la codificación (porque se descubre que la métrica que define la escala del eje y no es la misma que la del eje x.), consiste en situar un valor en un eje y sin escala, utilizando una curva, su fórmula y la escala del eje x. Por ejemplo: "sitúe en la figura que sigue el número 3 en el eje y".

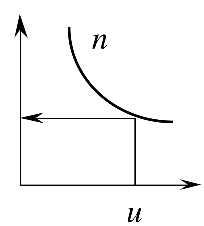


La codificación de un punto del plano se basa en la idea de proyección (a lo largo de los ejes), del punto sobre los ejes. Como los ejes están dotados de una escala, de acuerdo a la posición de los proyectados se tiene una idea de cuales son los valores de las coordenadas. En la práctica la persona suele trazar, aunque sea imaginariamente, unos segmentos paralelos a los ejes que van del punto a los ejes. La codificación actual utiliza principalmente segmentos paralelos a los ejes. En el ejemplo dado para obtener la posición del 3 en el eje y se debe trazar un segmento paralelo al eje y, que va del 1 en el eje x hasta la curva. Luego se debe trazar un segmento paralelo al eje x que va del extremo superior del segmento anterior hasta el eje y. El extremo de ese segmento corresponde al punto, del eje y, cuya ordenada es 3.

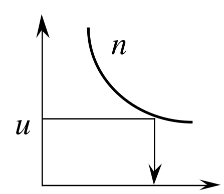
La propuesta hecha por Alson (1984, 87 y 89) va en la dirección de dotar al plano de nuevos objetos (que en la terminología actual (2000) podrían denotarse como dispositivos), útiles para la codificación. La intención de introducir esos nuevos objetos es la de aumentar las posibilidades de codificación de puntos del plano. Es decir, posibilitar la designación de puntos de multitud de maneras. Aparte de los segmentos y las curvas, Alson propone dotarlo de la bisectriz del primer (y tercer) cuadrante y de "los caminos". Los caminos podrían verse como una generalización de los segmentos. Existen muy pocas ideas en la literatura que se relacionan con la idea de camino, un ejemplo de una de esas ideas puede verse en Berman (1977, pág. 13).

La filosofía es que para codificar un punto hay que alcanzarlo con un camino. Para poder jugar su papel, de instrumento para la codificación, cada camino tiene su nombre. Existe una relación entre el nombre del camino y el nombre del punto alcanzado por él.

Para definir el nombre de un camino, se procederá en dos etapas: se dan unas convenciones para nombrar los puntos finales de los dos "caminos fundamentales" que aparecen en la que sigue. Luego se da un procedimiento para calcular el nombre de caminos complejos, o no fundamentales. Todo camino tiene un punto inicial. Un camino tiene un conjunto de puntos finales, ese conjunto suele tener un punto, pero puede tener más de uno e inclusive puede ser vacío. La que sigue ilustra los dos tipos de caminos fundamentales, los de ida que comienzan en el eje x y terminan en el eje y, los de vuelta que comienzan en el eje y y terminan en el eje x .

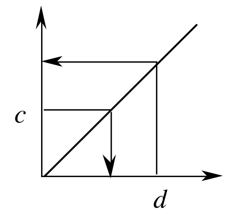


IDA

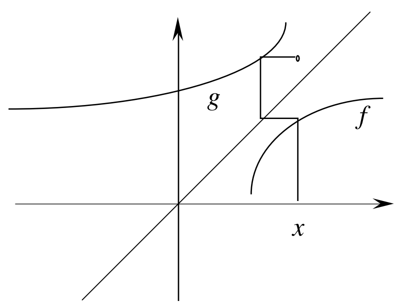


VUELTA

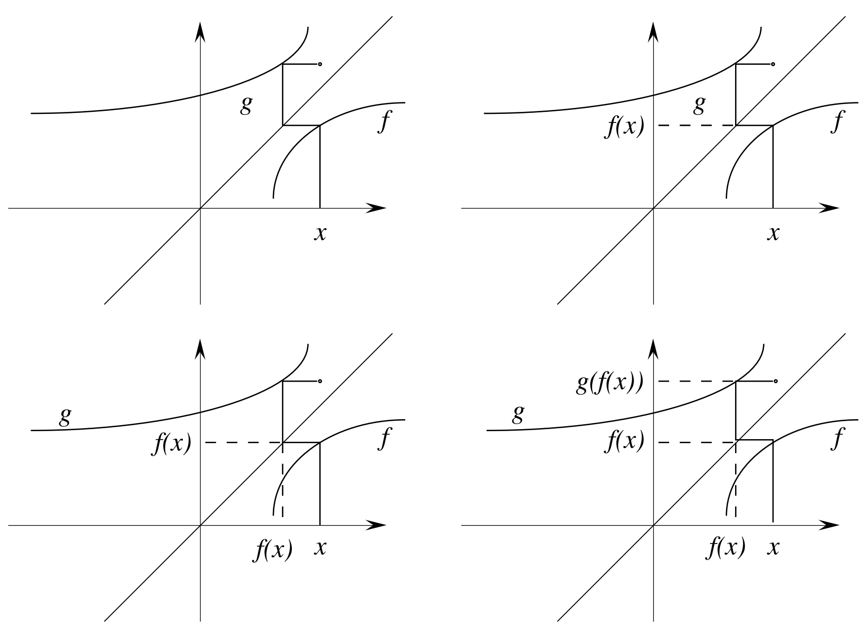
Las convenciones son las siguientes: el nombre de un camino de ida se obtiene poniendo entre paréntesis el nombre del punto inicial y a su izquierda el nombre de la curva donde está su esquina. El del camino de vuelta se obtiene haciendo el mismo proceso pero el nombre de la curva lleva en la posición de exponente el símbolo -1, para indicar que se trata de un camino de vuelta. Así el camino de ida de la figura se llama $n(u)$ y el de vuelta se llama $n^{-1}(u)$. La bisectriz es una curva que "no tiene nombre". Una consecuencia de ello es que los caminos de ida o vuelta, cuyas esquinas están sobre la bisectriz, tienen el mismo nombre que el nombre del punto inicial. Así los caminos de la figura que sigue tienen por nombre d y c respectivamente.



Un ejemplo de camino complejo aparece en la figura que sigue. Se puede observar que el conjunto de puntos finales está formado por un sólo punto y este punto no está sobre ningún eje. En general el conjunto de puntos finales de un camino complejo estará sobre la vertical del punto de salida o sobre alguno de los ejes. Las esquinas están siempre sobre una curva (las rectas son consideradas curvas).



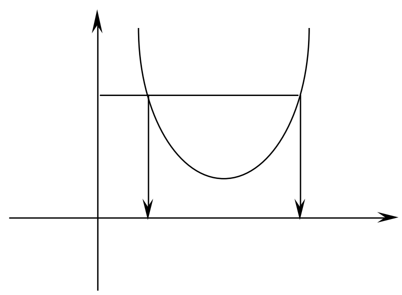
El procedimiento para calcular el nombre de caminos no fundamentales es ilustrado en la figura que sigue.



En la se puede apreciar que la técnica para dar el nombre al camino consiste en codificar las coordenadas de las sucesivas esquinas en el orden en que aparecen al recorrer el camino a partir del punto inicial. Para la codificación de cada esquina se utilizan caminos fundamentales y las convenciones que sobre ellos se hicieron. Cuando el camino tiene un único punto final el camino sirve para codificar una de las coordenadas del punto. En el ejemplo anterior el punto final se puede codificar como $(x, g(f(x))$. Formalmente, un camino con un sólo punto final, podría identificarse con una sucesión finita de pares ordenados:

$$\{(a,b),(b,c),(d,c),\ldots,(h,h),(h,e),(e,f)\},$$

con la condición de que pares ordenados sucesivos tienen al menos una coordenada igual y $e = 0$ o $e = a$. o $f = 0$. Para la aplicación que interesa, los pares ordenados corresponderan a puntos de los ejes, de la bisectriz o de los gráficos de curvas.
La figura que sigue muestra un camino con dos finales.

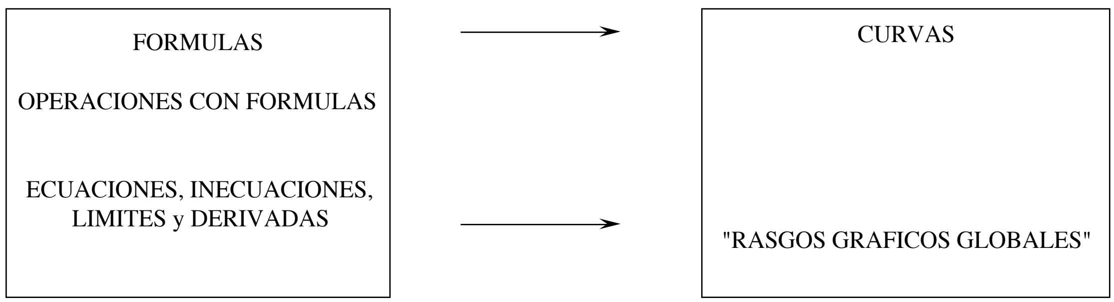


Las convenciones establecidas permiten ubicar en el plano puntos correspondientes a pares ordenados de codificación relativamente complicada, pertenecientes a gráficos de funciones que no aparecen en el dibujo. Utilizando caminos, ejercicios del tipo: "ubicar el punto que corresponde a $(x, g(f^{-1}(x))$", teniendo el dibujo de los gráficos de f y g y la posición de x sobre el eje x, son realizables por los estudiantes. Este tipo de ejercicios de codificación no numérica de puntos del plano son casi inexistentes en la literatura.

El cuadro algebraico es, en la enseñanza actual, un generador de código manipulable en el cuadro gráfico. El incorporar los caminos al cuadro gráfico, incrementa su poder generador de código manipulable en el cuadro algebraico. En ese sentido, aumenta su parecido con el cuadro algebraico, ya que actualmente el cuadro gráfico no es utilizado *por el estudiante* para generar código.

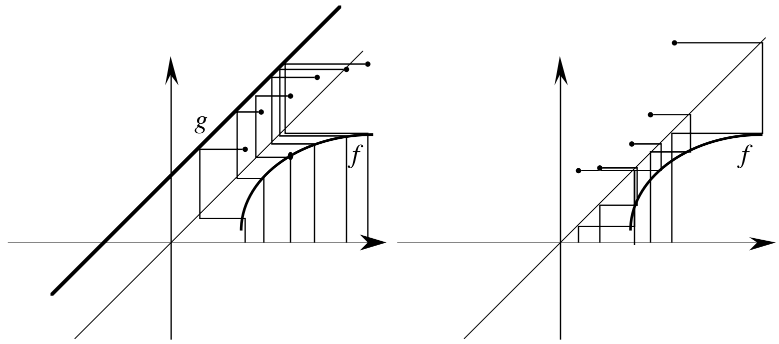
5.3.2- Operaciones con curvas del plano.

Un análisis detallado de la transferencia de cuadro a cuadro (en la enseñanza actual) permite ver que la transferencia no se da únicamente despues del trabajo de cálculo de límites, derivadas, ... etc. sino que en algunos casos particulares se pasa directamente de la fórmula a la curva. Este es el caso para las fórmulas de la forma $ax+b$, ax^2+bx+c, e^x, $Sen(x)$,.. etc. En algunos sistemas escolares, la enseñanza de estos hechos, se hace en años anteriores a la introducción de derivadas. En algunos de los libros de nivel universitario nombrados en el Apéndice 1, se dedican capítulos aparte para el tratamiento de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Esto en particular indica que en el cuadro gráfico usual existen ciertas curvas tipo, cuyos nombres son conocidos. Esto queda reflejado en el esquema de la figura que sigue.



El esquema pone tambien en evidencia el segundo aspecto de la asimetría ya señalado: el cuadro gráfico actual, a diferencia del cuadro algebraico, no incluye mecanismos de manipulación de sus objetos. Alterar la naturaleza de la transferencia del cuadro algebraico al gráfico, implica crear dentro del cuadro gráfico operaciones con los objetos que se correspondan con las operaciones entre objetos del cuadro algebraico (operaciones con fórmulas).

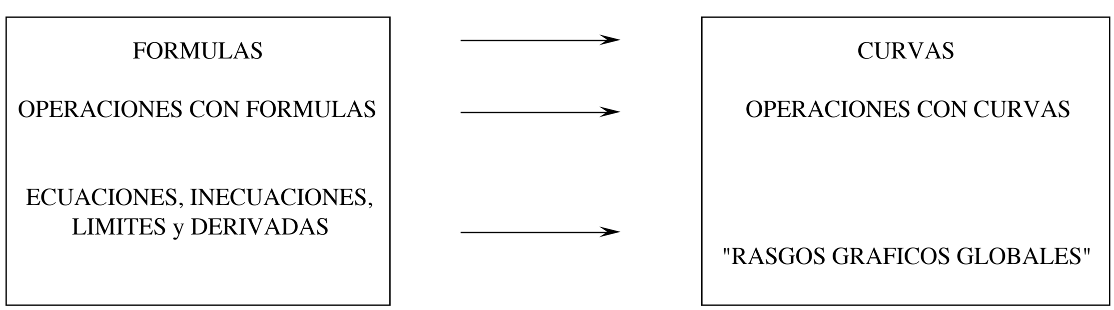
Los caminos no sólo son útiles para codificar puntos del plano. Sirven tambien para construir curvas a partir de otras. En ese sentido, sirven para efectuar operaciones con curvas y resolver parcialmente la asimetría de los cuadros. Esto además puede usarse para una segunda fase de codificación: no sólo codificar los puntos sino tambien las curvas. Las nuevas curvas tienen los nombres de los tipos de caminos que han sido utilizados para obtenerlas. Los dos ejemplos de la figura que sigue muestran cómo se construyen las nuevas curvas con los caminos. Para ver las nuevas curvas una los puntos finales de los caminos que aparecen en cada figura.



Artigue y Szwed (1984, pág. 34) reportan una observación de un profesor de física: "par contre je demande dès la seconde aux élèves de tracer la représentation graphique de la somme de 2 fonctions à vue de graphe. Cette façon de procéder leur semble toujours très étrange". ("en cambio, a partir del penúltimo año de bachillerato les pido a los alumnos trazar la representación gráfica de la suma de dos funciones a partir de sus gráficas. Esta manera de proceder les parece siempre muy extraña"). Aparte de reconfirmar la constatación de una ausencia casi total de operaciones con los objetos del cuadro gráfico, este comentario evidencia la necesidad de completar las operaciones gráficas con operaciones que correspondan a la suma, el producto y la inversa numérica, $1/f$, de funciones.

Para cada una de las operaciones suma, producto o inversa numérica, la curva resultado de la operación, se especifica a través del mecanismo que se debe aplicar para situar un punto de la curva en una vertical cualquiera. La construcción física del dibujo exige la aplicación reiterada del mecanismo para unas cuantas verticales y luego el trazado de una curva sencilla que una los puntos obtenidos. La curva que resulta suele llamarse curva punto a punto. Estas operaciones que pueden parecer intuitivamente obvias para el profesor, ya que sus definiciones son triviales, no lo son para los estudiantes. Un trabajo delicado debe hacerse para pasar de la definición a un conocimiento real para el estudiante. Aunque en la sección 4.1.3.4 se dan algunos detalles, el estudio detallado de este paso está fuera de los objetivos de este trabajo [xx].

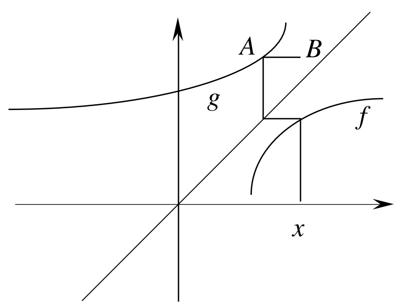
Con la incorporación al cuadro gráfico de las anteriores operaciones gráficas se llega al esquema de funcionamiento de los cuadros de la figura que sigue.



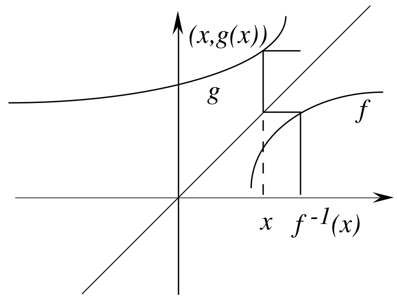
5.3.3- Las transformaciones inducidas por una función.

Un problema evidente de las operaciones que se han definido con los caminos es que para esbozar curvas se deben hacer muchos caminos y ello aparte de ser incómodo puede acarrear errores. Está, además, el problema de fondo que se señaló más arriba: el de hacer las operaciones del cuadro gráfico lo suficientemente rápidas como para poder competir con las algebraicas y simetrizar, en la práctica, el funcionamiento de ambos cuadros. Una reflexión, tratando de encontrar mecanismos visuales que simplificaran las operaciones gráficas de la sección anterior llevó a la definición de ciertas transformaciones de subconjuntos del plano. Los caminos jugaron un papel fundamental en su génesis. Tambien son un instrumento precioso para explicar las transformaciones a los alumnos.

En la figura que sigue, codificando los puntos se descubre que el punto final B se llama $(x,g(f(x)))$ y por lo tanto está sobre el gráfico de $g \circ f$.



Se nota tambien que desplazando A horizontalmente y de manera adecuada se obtiene B que, como se acaba de ver, es un punto del gráfico de $g \circ f$. Esto sugiere que el gráfico de $g \circ f$ podría ser construido desplazando conveniente y horizontalmente puntos del gráfico de g. Si se intenta hacer esto, la pregunta es, en cada caso, ¿hacia "donde tiene que moverse" el punto A ?. Recodificando A como punto genérico del gráfico de g, es decir como $(x,g(x))$, se induce una recodificación del resto de las esquinas del camino. La relación entre los nuevos códigos es más clara, para nuestros fines, que la que hay entre las letras A y B. Véase la figura que sigue.



Ahora el punto final B, se llama $(f^{-1}(x), g(x))$. Es decir el gráfico de $g \circ f$ se puede obtener haciendo la transformación horizontal

$$(x, g(x)) \xrightarrow{T_f^H} (f^{-1}(x), g(x)).$$

En Alson (1994) se define formalmente T_f^H. Se trata de una transformación cuyo dominio es el conjunto de partes de R^2. Para cualquier conjunto C se tiene que:

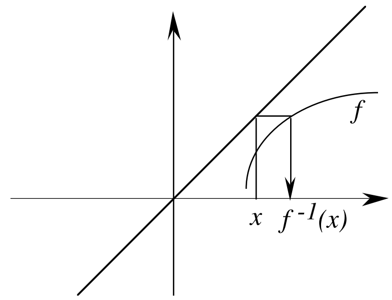
$$T_f^H(C) = \{(x, y) \mid (f(x), y) \in C\}.$$

Se denominará la transformación horizontal inducida por f . Si f y g y $g \circ f$ denotan curvas y una compuesta de ellas, la propiedad importante para construir la representación gráfica de $g \circ f$, a partir de f y g, es:

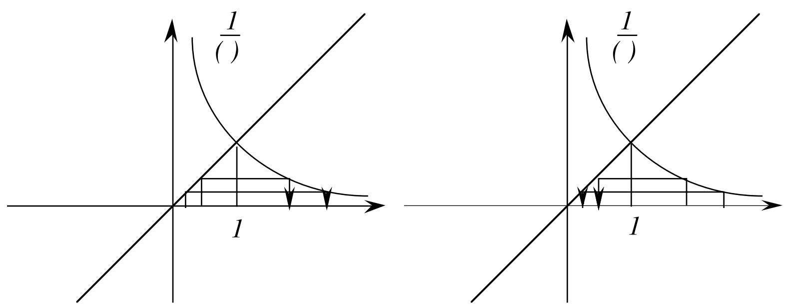
$$T_f^H(g) = g \circ f$$

Este objeto teórico es utilizado de manera implícita en la literatura cuando, por ejemplo, se dice que el gráfico de $Sen(()+2)$ se obtiene trasladando el gráfico de $Sen()$ dos unidades hacia la izquierda: en ese caso se está utilizando la $T_{()+2}^H$ para transformar el gráfico de $Sen()$. Además del uso implícito, en la literatura sólo son utilizadas las transformaciones de las funciones: $()+a$, $a \cdot ()$ con $a > 0$, $-()$ y $|\,|$. En Gasquet y Chuzeville (1994, pág. 125) se habla de $T_{1/()}^H$ (aunque no la definen formalmente). El disponer de la definición del objeto permite extender su uso a casi cualquiera de las funciones elementales, como se puede ver en Alson (1987, Cap.7). Sin embargo antes de poder utilizar las transformaciones que se acaban de definir para dibujar funciones compuestas se debe desarrollar, en cada caso, una descripción del tipo de transformación geométrica elemental que inducen.

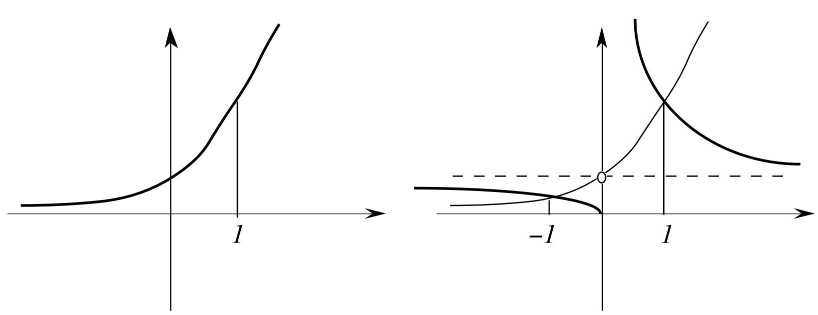
Aplicar una transformación significa utilizarla para "desplazar" puntos. Para ello hay que saber cuál es la posición, sobre el eje x, del conjunto $f^{-1}(x)$ con respecto a x. Esto se puede descubrir muy fácilmente usando un tipo de camino. En el dibujo anterior, debido a que f es inyectiva, $f^{-1}(x)$ tiene un sólo elemento que denotamos tambien $f^{-1}(x)$. Se nota que el valor $f^{-1}(x)$, sobre el eje x, es alcanzado siguiendo el camino que sale de x, va a la bisectriz, va a la curva f y finalmente va al eje x. La figura que sigue ilustra este tipo de camino.



La ventaja de tener el tipo de camino de la figura es que, para la mayoría de las curvas elementales, al hacer varios caminos se pueden obtener conclusiones globales de la posición de $f^{-1}(x)$ con respecto a x y con ello tener una idea del funcionamiento gráfico de T_f^H. Ilustramos este hecho con el ejemplo de la figura que sigue, hecho para la parte positiva de la función definida por $1/(\ )$.



Al mirar los gráficos de la figura , se observa que los puntos que están en $(0,1)$ son transformados en puntos que estan en $(1,\infty)$, además el orden se invierte. Igualmente los puntos de $(1,\infty)$ son transformados en puntos que estan en $(0,1)$ y además el orden se invierte. El 1 es fijo y el 0 desaparece. Haciendo el dibujo correspondiente, un análisis similar se puede hacer con la parte negativa del gráfico de $1/(\ )$, y se obtiene como punto fijo el -1, $(-1,0)$ y $(-\infty,-1)$, se transforman en $(-\infty,-1)$ y $(-1,0)$ respectivamente (con inversión de orden). Estas especificaciones, obtenidas gráficamente, son suficientes para transformar curvas sencillas (o figuras del plano). La figura que sigue muestra un ejemplo.

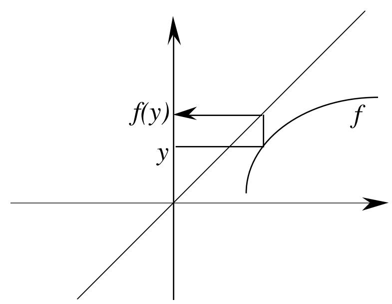


Sobre el gráfico de la izquierda se ha puesto la curva a transformar. Sobre el de la derecha, en trazo grueso, la transformada con $T^H_{1/()}$, y en trazo fino, la curva a transformar. Nótese que en 0, la curva se rompe, esto es consecuencia del hecho de que el punto 0 desaparece.Se han marcado sobre el eje x, los puntos -1 y 1, para hacer notar que es alrededor de ellos que se produce la "inversión". El gráfico de la derecha es un esbozo del gráfico de $e^{()}$, el gráfico transformado es un esbozo de $e^{1/()}$, es decir la compuesta de $1/()$ con $e^{()}$. Esto es consecuencia de la propiedad $T^H_f(g) = g \circ f$.

Tambien se puede definir la transformada vertical inducida por f. Se define como:

$$T^V_f(C) = \left\{(x, f(y)) \middle| (x, y) \in C\right\}$$

La figura que sigue, ilustra el tipo de camino que ayuda a comprender las propiedades geométricas globales de la transformación.



La propiedad interesante para esta transformación es:

$$T^V_g(f) = g \circ f.$$

Las transformaciones verticales son utilizadas más frecuentemente que las horizontales pero en general no a través de una visión geométrica. Para aplicar la propiedad que se acaba de dar las personas miran las alturas de f, para hacerse una idea numérica, evalúan g en ese valor numérico aproximado y el valor obtenido lo llevan al plano. Es decir la aplicación suele exigir una salida del cuadro gráfico. En Gasquet y Chuzeville (1994, pág. 125) se da una visión geométrica de $T^V_{1/()}$. En Alson (1987, Cap.7) se pueden ver las propiedades geométricas de las transformaciones verticales de la mayoría de las funciones elementales.

$T^V_g(f) = g \circ f$ y su análoga para las transformaciones horizontales pueden ser extendidas para ser utilizadas en la composición de un número $n > 2$ de curvas, utilizando las propiedades:

$$T^V_{g \circ f} = T^V_g \circ T^V_f$$

y

$$T^H_{g \circ f} = T^H_f \circ T^H_g$$

y la asociatividad de la composición. En particular se obtiene:

$$T^V_{f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n} = T^V_{f_1} \circ T^V_{f_2} \circ \cdots \circ T^V_{f_n}$$

y

$$T^H_{f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n} = T^H_{f_n} \circ T^H_{f_{n-1}} \circ \cdots \circ T^H_{f_1}$$

El estudio matemático de estos objetos es parte del Capítulo 3 de este trabajo. En la parte del capítulo donde se estudian los dispositivos (4.2), se analiza utilizando la teoría de situaciones el funcionamiento de estos objetos en el aprendizaje de los alumnos. El tipo de dificultades que se han manifestado al enseñar con una ingeniería que usa estos objetos. Algunas conexiones que tiene esta actividad con la adquisición por parte del alumno de cierta capacidad de reconocer curvas.

5.3.4- Operaciones aritméticas con las gráficas.

Los mecanismos para hacer la curva punto a punto en el caso de las operaciones aritméticas, son aparentemente más sencillos que el camino de la compuesta. Sin embargo, exigen por parte del alumno una salida del cuadro gráfico a un cuadro numérico. Por ejemplo en el caso de la suma el alumno debe evaluar, para un valor x dado, las ordenadas de los puntos correspondientes de las dos curvas, sumarlas numéricamente y situar un punto sobre la vertical correspondiente a x cuya ordenada sea el resultado de la suma. La aplicación reiterada del mecanismo es tediosa y las posibilidades de obtener esbozos defectuosos son grandes con alumnos que tienen tendencia a tomar en cuenta muy pocos puntos.

Para cada una de las operaciones, se describe a continuación los saberes "pertinentes" para obtener una esbozo razonable sin tener que hacer demasiados puntos. El conjunto de saberes pertinentes" de una operación serán llamados "discurso descriptivo de la operación". Es llamativo que los discursos descriptivos, además de aumentar la competitividad de la operación visual frente a su correspondiente algebraica, tienden a minimizar el uso del cuadro numérico. Orientan el trabajo del alumno hacia aspectos cualitativos y apuntan hacia operaciones del cuadro visual.

El discurso descriptivo de la suma.

Al trabajar sobre varios ejemplos se descubren algunas propiedades útiles. Por ejemplo: la curva suma "está en la zona" donde ambas están definidas (el dominio de la curva suma es la intersección de los dominios de las curvas sumandos). Los hechos, que se explicitan a continuación, son válidos en esa zona común. El hecho de que $"cero + algo = algo"$, es decir que 0 es elemento neutro para la suma, se traduce en que para los valores de x que corresponden a los puntos de corte de una curva con el eje x, la curva suma corta o pasa por la otra curva. Otro hecho importante es que si f es positiva en un intervalo entonces la curva suma $f + g$, debe estar por encima de la curva g en ese intervalo. Finalmente si una de las dos curvas es paralela al eje x , la suma es la traslación vertical de la otra curva y se traslada tanto como la altura de la paralela. Por lo tanto si uno solo de los sumandos es paralelo al eje x, la curva suma tiene la misma forma que la curva que no es paralela.

Estas observaciones constituyen esencialmente una descripción de "por dónde pasa" la curva suma con respecto a las curvas sumando. Se pueden articular en un conjunto de pasos o instrucciones a seguir para asegurar un esbozo rápido y relativamente fiel de la curva suma.

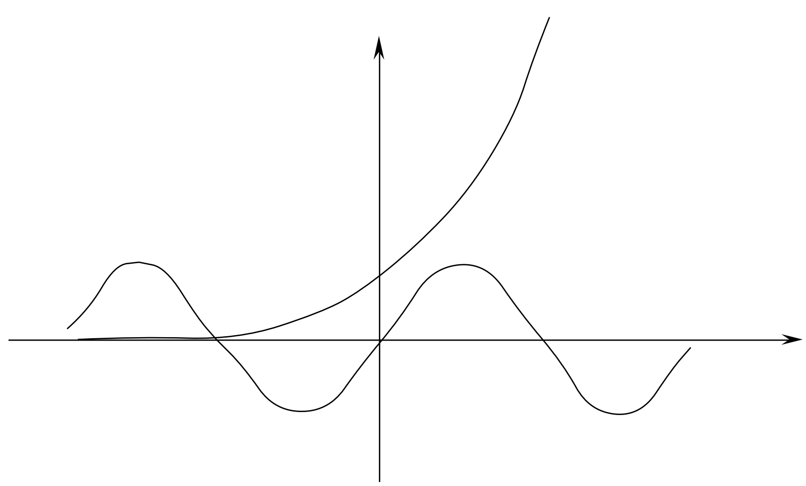
Primer paso: si una de las dos curvas es paralela al eje x, desplace la otra curva verticalmente tantos espacios como la altura de la paralela.

Segundo paso: localizar los puntos de corte con el eje x de cada una de las dos curvas y marcar los correspondientes puntos sobre la otra curva, ya que por ahí debe pasar la curva suma.

Tercer paso: observar las zonas positivas o negativas de cada una de las curvas. Si f es positiva en una zona, la curva suma $f+g$ debe estar por encima, en esa zona, de la curva g. Hacer este proceso para ambas curvas.

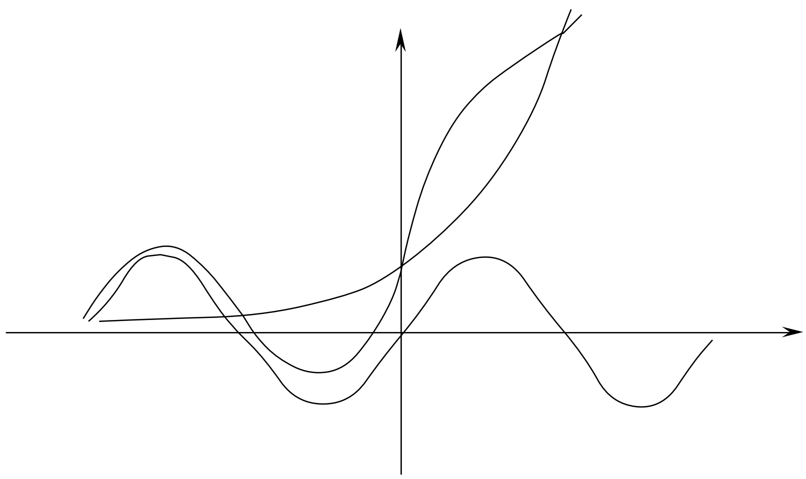
Cuarto paso: grafique los puntos de la curva suma que corresponden a puntos de corte de las dos curvas.

Ejemplo. Un esbozo de $e^{()}$ y $Sen()$ aparece en la figura que sigue.

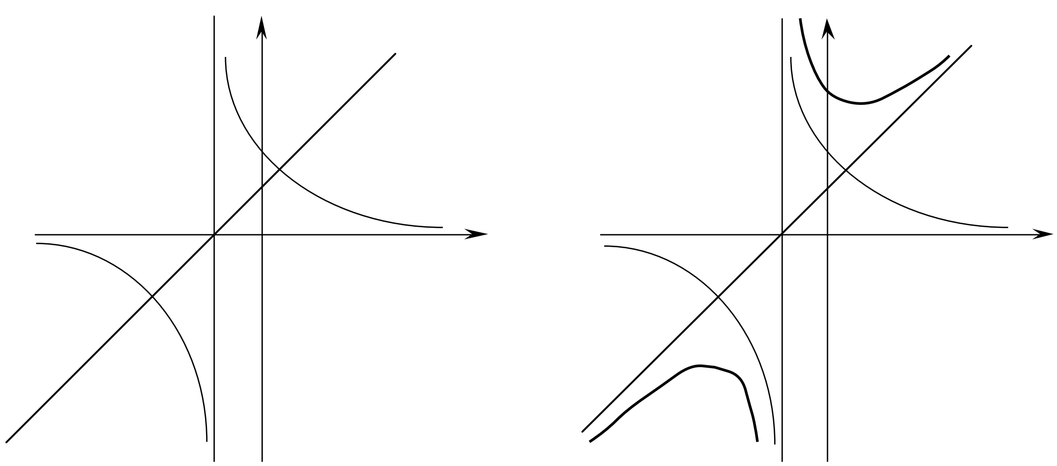


La curva que aporta la información interesante es el seno: tiene varios puntos de corte con el eje x. Por lo tanto el primer paso es marcar sobre la curva $e^{()}$ los correspondientes puntos por donde va a pasar la curva de $e^{()}+Sen()$. En el extremo izquierdo la curva va a estar ligeramente por encima de $Sen()$. Pero, hacia la derecha, es mejor definir la posición de la curva de $e^{()}+Sen()$ con respecto a $e^{()}$, esto se ve fácilmente al tomar en cuenta el signo de

$Sen()$ entre dos cortes consecutivos con el eje x. Donde $Sen()$ es positiva la suma estará por encima de $e^{()}$. Se obtiene aproximadamente:



En el ejemplo que se acaba de trabajar una curva aporta más información que la otra. El seno, debido a que tiene muchos puntos de corte con el eje x y varias partes positivas y negativas, es el que aporta la información que permite describir cómo va a ser $e^{()} + Sen()$ con respecto a $e^{()}$. Como lo muestra el ejemplo que sigue, no siempre los roles de cada una de las curvas están tan claramente diferenciados. Al notar que $\frac{x^2+2x+2}{x+1} = x+1+\frac{1}{x+1}$. la curva de $\frac{()^2+2()+2}{()+1}$ puede hacerse como la suma de dos curvas que corresponden a fórmulas fáciles de graficar (una recta y una hipérbola).

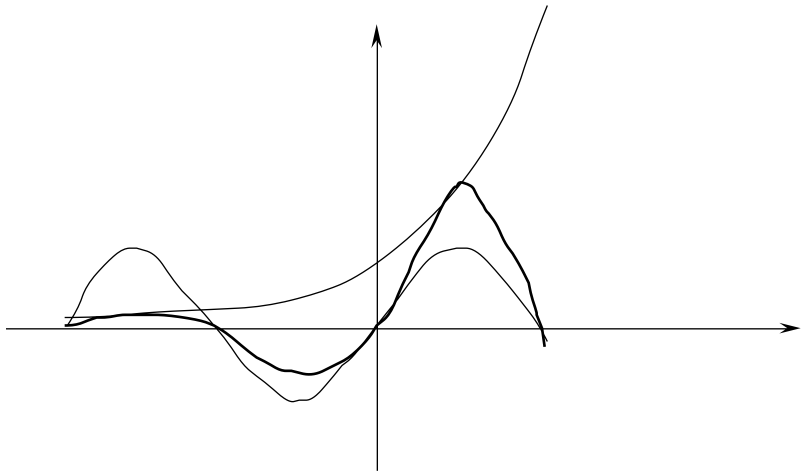


Los detalles de las dos curvas que resultan útiles para la graficación de la suma son:
A la derecha de la asíntota vertical ambas curvas son positivas, esto quiere decir que la curva suma deberá estar por encima de las dos curvas.

Cerca de $x = 0$ la recta tiene alturas muy pequeñas, la curva suma no puede ser muy distante de la hipérbola en esa zona.
Para la zona donde x es grande las alturas de la hipérbola se vuelven cada vez más pequeñas, por lo tanto la curva suma en esa zona estará muy cerca de la recta y se irá pegando a ella a medida que x esté situado más hacia la derecha.
Un razonamiento similar se puede hacer para la parte que corresponde a las x negativas.
Se obtiene así la curva de la segunda parte de la figura. En este ejemplo el único punto de corte con el eje x no es de utilidad porque para ese valor la otra curva no existe. Y ninguna de las dos curvas ha jugado un papel preponderante para la descripción de la curva suma. El ejemplo tambien puede servir de ilustración al siguiente hecho que podría formar parte del discurso descriptivo de la suma: en la zona donde f es cercana al eje x, la curva $f + g$ es cercana a la curva g y viceversa.

El discurso descriptivo del producto de curvas.

Al igual que con la suma, despues de hacer unos cuantos ejemplos se puede llegar a hacer un discurso descriptivo de la curva producto. La curva producto está en la zona donde ambas están definidas. En esa zona, la curva producto debe pasar por los puntos de corte con los ejes x de las curvas factores. Si f tiene un punto de altura 1 entonces $f \cdot g$ pasa por el punto de corte de la vertical correspondiente con g. Si f tiene un punto de altura -1 entonces $f \cdot g$ pasa por el simétrico con respecto al eje x, del punto de corte de la vertical correspondiente con g. Si entre dos puntos de corte consecutivos las curvas factores son conexas, la curva producto tendrá un solo signo en esa zona, es decir estará totalmente por encima o por debajo del eje x entre esos dos puntos de corte, dependiendo de los signos de las curvas factores en esa zona.
Al realizar el esbozo de $e^{()} \cdot Sen()$, la curva que aporta más información del producto es la curva de $Sen()$. Esto se debe a que la curva de $e^{()}$ no tiene puntos de corte y su signo es constante. En cierto sentido la curva producto puede ser vista como una deformación de la curva de $Sen()$. Tiene los mismos puntos de corte y las mismas zonas positivas y negativas. El tamaño de las oscilaciones va a variar de acuerdo a la curva de $e^{()}$. Donde $e^{()}$ es muy pequeña las oscilaciones tendrán poca altura, donde $e^{()}$ es grande las oscilaciones serán grandes. La curva producto debe estar siempre por debajo de la curva de $e^{()}$ porque la mayor altura de la curva de $Sen()$ es 1 y $e^{()}$ es positiva. Estos hechos están representados en la figura que sigue.



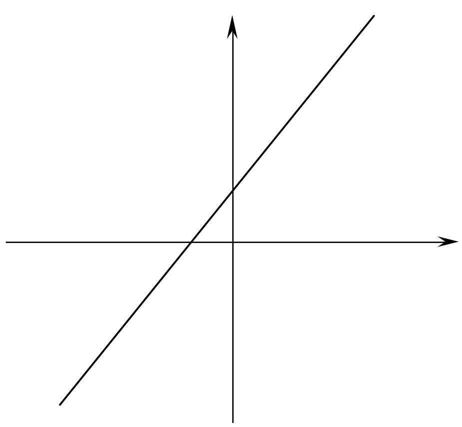
El discurso descriptivo para la curva cociente o recíproca.

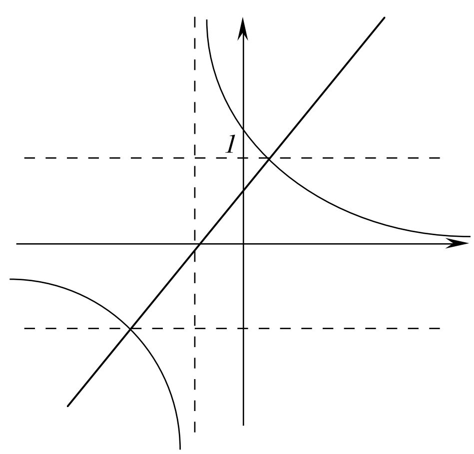
La curva de la fórmula $\dfrac{1}{f()}$ recibe el nombre de curva cociente o recíproca de la curva de $f()$. Al igual que para la suma y producto de curvas, el trabajo sobre unos cuantos ejemplos hace aflorar los aspectos de la curva de $f()$ a tomar en cuenta cuando se va a esbozar la curva $\dfrac{1}{f()}$.

Lo primero son los puntos de corte con el eje x, ya que allí la nueva curva cociente no va a estar definida.

Lo segundo son los puntos de altura 1 y -1 porque esos puntos son comunes a $f()$ y $\dfrac{1}{f()}$.

Finalmente, los puntos muy cercanos al eje x van a convertirse en puntos muy lejanos al eje x. Igualmente, puntos muy lejanos al eje x se convertirán en puntos muy cercanos a dicho eje.





Nótese que el discurso descriptivo de los pasos que hay que dar para construir la curva cociente es una descripción de la transformación de $T^{V}_{1/()}$.

El aprendizaje de estos "discursos descriptivos" por parte del estudiante no es inmediato. En la parte de los dispositivos se hace un análisis somero sobre este aprendizaje.

5.4- Movimiento del punto de equilibrio

"La première phase est structurée autour du fonctionnement de l'enseignement usuel, considéré comme état d'équilibre du fonctionnement d'un système, un équilibre qui fut longtemps stable mais dont on sent poindre l'obsolescence" (Artigue en 251, Brun 1996). Este punto de vista parece adecuado para, a posteriori, decir cómo vemos el movimiento del alejamiento del "estado de equilibrio inicial" (1982).

Sobre el plan didáctico la enseñanza estaba fuertemente algoritmizada. Y sobre todo, hacia la manipulación de operaciones elementales del álgebra. Epistemológicamente, la actividad de construcción de gráficas, estaba centrada en el concocimiento previo de una serie de instrumentos analíticos: límites, derivadas, etc. El aspecto cognitivo: la gran mayoría de alumnos que ingresaban a recibir esa enseñanza no estaban preparados para ella.

En una sociedad dónde la relación entre la actividad de enseñanza y su retribución es ficticia, la incapacidad de la mayoría de los estudiantes, no necesariamente lleva a la "obsolescencia del punto de equilibrio". En general se manifiesta más bien por un alto índice de fracaso estudiantil: en algunos cursos sólo aprobaba un 10 %. La decisión de intentar modificar las premisas didácticas y epistemológicas provino de los profesores.

El estado cognitivo de los alumnos ejerció una fuerte presión para modificar las actividades de manera que su baja formación algebraica no hiciese obstáculo, en el nuevo estado. Por ello la búsqueda se orienta hacia más actividades en el cuadro gráfico y un reequilibrio entre los cuadros algebraico y gráfico (explicadas más arriba).

Además de ello favoreció la introducción de una semiótica poco convencional, que facilitara las actividades en el aula, mejorando "el ambiente de trabajo". Parte de esas modificaciones fueron inspiradas por una noción de "ambiente de trabajo". La noción de "ambiente de trabajo" que funcionaba en buena parte, bajo la metáfora de la red, tiene poco que ver con la noción de ambiente o "milieu" de una situación. Tiene poco que ver con la noción de aprendizaje. Sin embargo, indirectamente (de esto hemos tomado conciencia a posteriori) y en conjunción con el reequilibrio, afectó profundamente el "milieu" de la situación.

Por otro lado, al inicio, se decide temporalmente, no aspirar a satisfacer todas las exigencias de programa establecido. Esto definió un espacio para poder hacer pruebas e inovar. La existencia misma del espacio y la falta de presión sobre él se deben en gran parte a la relación ficticia que hemos señalado: enseñar un poco menos a los alumnos, dado la formación general deficiente, no era penalizado y ni siquiera notado por el sistema escolar.

El "deslizamiento epistemológico" se produce de forma gradual. Inicialmente son pequeñas actividades con finalidades específicas de afinamiento de manejo simbólico (codificación, ...etc). Estas actividades no están ligadas directamente al objetivo del tema. Son planteadas gracias a la existencia del espacio que nos dimos (definido más arriba). El siguiente paso se produce cuando se toma conciencia que los objetos gráficos (caminos principalmente) pueden ser utilizados para ciertas prácticas relacionadas con objetos teóricos (las transformaciones de gráficas inducidas por una función), que pertenecen a otro sustrato epistemológico. Y que dichos objetos pueden ser usados en la enseñanza para satisfacer las exigencias del programa. A nivel de la enseñanza esto lleva a la presentación explícita de dichos objetos a los alumnos y la introducción de ciertos dispositivos claves. La conciencia de esta posibilidad plantea una investigación, reportada parcialmente en el Capítulo 6, para comprender claramente la naturaleza matemática de esos objetos. Paralelamente se plantea la concepción y el diseño de una estrategia de enseñanza del tema de construcción de gráficas de funciones sobre el nuevo fundamento epistemológico. Esta última fase se hace en parte para satisfacer las exigencias didácticas establecidas por el programa en el estado inicial y con ello facilitar la inserción de ese deslizamiento epistemológico en el medio de la enseñanza. Esta última fase se emprende cuando se ve cómo es el funcionamiento de los dispositivos con los alumnos y se constata de que se articulan razonablemente bien con la formación que tienen.

Es necesario aclarar, que los "nuevos objetos" están presentes en el estado de equilibrio inicial. Pero su estatus es muy diferente. Son unos objetos marginales, parecen más bien objetos paramatemáticos, frente a los "algebraicos". Su estatus se debe probablemente a que no habían sido definidos desde las matemáticas y el manejo y propiedades formales eran ignorados al iniciar el proceso.